

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FUNDAMENTOS DOS SISTEMAS MULTICORPOS COM CORPOS FLEXÍVEIS**  
**APLICADOS A UM MODELO DE BÍPEDE**

Humberto Barbosa Neto

São Paulo  
2014

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FUNDAMENTOS DOS SISTEMAS MULTICORPOS COM CORPOS**  
**FLEXÍVEIS APLICADOS A UM MODELO DE BÍPEDE**

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de  
Graduação em Engenharia Mecânica

Humberto Barbosa Neto

Orientador: Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

São Paulo  
2014

**Barbosa Neto, Humberto**

**Fundamentos dos sistemas multicorpos com corpos flexíveis aplicados a um modelo de bípede / H. Barbosa Neto. – São Paulo, 2014. 72 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1.Dinâmica de sistemas multicorpos 2.Corpos flexíveis  
3.Modelo bípede I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.**

## RESUMO

A evolução da ciência e da tecnologia possibilitou a construção de sistemas mecânicos cada vez mais complexos e detalhados. Para criar modelos numéricos que representassem adequadamente esses sistemas e sua crescente complexidade, tornou-se necessário o desenvolvimento de ferramentas que gerassem de forma automática as equações de movimento. Foi dentro desse contexto que, a partir da década de 1980, ganharam espaço no universo das análises dinâmicas os sistemas multicorpos (multibody systems – MBS).

Originalmente, a técnica de multicorpos foi desenvolvida para gerar o modelo matemático de qualquer sistema mecânico que pudesse ser modelado fisicamente como um conjunto de corpos rígidos. Recentemente, com o avanço das tecnologias de processamento e armazenamento de dados, permitiu-se também a inclusão de corpos flexíveis (deformáveis) nos modelos. Todos esses corpos são interligados por juntas, influenciados por forças, direcionados por movimentos prescritos e limitados por restrições.

Com as facilidades introduzidas principalmente com as interfaces gráficas, os softwares ficaram muito mais acessíveis passando a falsa sensação de que os fundamentos teriam agora menor importância o que é extremamente perigoso no tratamento do problema.

Por outro lado os fundamentos teóricos, bastante consolidados em relação aos sistemas multicorpos, são apresentados ainda da forma tradicional sem buscar uma ligação com as ferramentas modernas que estão surgindo.

O propósito deste trabalho é então compreender e fazer uso de uma base teórica de multicorpos aliada a ferramentas computacionais para estudo de um modelo de uma perna bi articulada com partes flexíveis com vistas para aplicações em modelos bípedes.

## **ABSTRACT**

The evolution of science and technology enabled the construction of mechanical systems increasingly complex and detailed. To create numerical models to adequately represent these systems and their increasing complexity, it became necessary to develop tools that automatically generate the equations of motion. It was within this context that, from the 1980s, gained ground in the universe of multibody dynamic analysis systems (multibody systems - MBS).

Originally, the technique was developed to generate the mathematical model of any mechanical system that could be physically modeled as a set of rigid bodies. Recently, the advancing technologies of processing and storage of data, also allowed the inclusion of flexible bodies (deformable) models. All these bodies are connected by joints, influenced by forces, driven by movements prescribed and limited by restrictions.

With the facilities introduced mainly with graphical interfaces, the software became more accessible through a false sense that the foundations have now minor importance which is extremely dangerous to treat the problem.

On the other hand the theoretical, rather consolidated in relation to multibody systems, are also presented in the traditional manner without seeking a connection with the modern tools that are emerging.

The purpose of this paper is to understand and make use of all the theoretical basis of multibody combined with computational tools to study a model of a leg bi-articulated and flexible parts with a view to applications in bipedal models.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	1
2	OBJETIVO.....	2
3	ESTADO DA ARTE.....	2
3.1	Problemas típicos .....	3
3.2	Algumas áreas de aplicação .....	3
3.3	Modelamento com multicorpos .....	6
3.4	Teoria básica .....	7
3.5	Definições .....	8
4	METODOLOGIAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO.....	12
4.1	Ferramentas utilizadas .....	14
5	APRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	14
5.1	Modelamento do sistema pêndulo duplo em espaço de estado.....	16
5.2	Validação e soluções do modelo – frequências naturais do sistema.....	20
5.2.1	- Determinação analítica das frequências naturais do pêndulo duplo .....	20
5.2.2	– Frequências naturais através da transformada de Fourier .....	21
5.2.3	– Frequências naturais através das matrizes de estado linearizadas.....	24
5.2.4	– Análise das frequências através do sistema linearizado usando solver MotionSolve .....	27
5.2.5	Quadro geral comparativo entre frequências naturais.....	28
5.3	Validação e soluções do modelo – grandes deslocamentos.....	28
5.4	Frequências naturais de componentes.....	33
5.4.1	Frequências naturais – forma analítica .....	33
5.2.2	Frequências naturais – forma discretizada em elementos finitos.....	34
6	Modelamento e solução em ambiente motionsolve considerando a flexibilidade de um componente .....	39
7	CONCLUSÕES.....	46
8	REFERÊNCIAS .....	48
9	APÊNDICES .....	49
9.1	Flexibilidade estrutural em análises dinâmicas – método de Craig Bampton .	49
9.2	Rotina em Mathematica para obtenção do sistema em espaço de estado .....	58
9.3	Rotina em Matlab para cálculo das frequências analíticas .....	60

9.4	Rotina Scilab – integração numérica não linear .....	62
9.5	Modelo do mecanismo no MotionView .....	64
9.6	Modelo elementos finitos matlab.....	67

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3-1 - Aplicação de multicorpos em manufatura .....	3
Figura 3-2 - Aplicação de multicorpos a motores a combustão .....	4
Figura 3-3 - Aplicação de multicorpos a um veículo completo .....	5
Figura 3-4 - Aplicação de multicorpos em automação .....	6
Figura 4-1 – Fluxo das soluções usadas neste trabalho .....	13
Figura 5-1 - Modelo referência - membro inferior .....	15
Figura 5-2 - Modelo simplificado - pêndulo duplo .....	15
Figura 5-3 - Ângulos de referência adotados .....	16
Figura 5-4 - Ângulos para determinação das frequências naturais .....	20
Figura 5-5 - Pêndulos inclinados alinhados a 5° da posição de equilíbrio .....	22
Figura 5-6 - Posição da coxa - integração do sistema em espaço de estado (não linear) .....	22
Figura 5-7 - - Posição da canela - integração do sistema em espaço de estado (não linear) .....	23
Figura 5-8 - FFT do deslocamento da canela .....	24
Figura 5-9 - Modelo do pêndulo duplo em ambiente MotionView .....	29
Figura 5-10 - Posição inicial - grandes deslocamentos .....	29
Figura 5-11 - Ângulo da coxa - grandes deslocamentos – integração do modelo não linear em espaço de estado .....	30
Figura 5-12 - Ângulo da canela - grandes deslocamentos – integração do modelo não linear em espaço de estado .....	30
Figura 5-13 - Ângulos da coxa e canela sobrepostos - grandes deslocamentos – solução do solver MotionSolve .....	31
Figura 5-14 - Comparação da solução por integração do sistema em espaço de estado e do MotionSolve – grandes deslocamentos .....	31
Figura 5-15 – Traçado da ponta do pêndulo até 5s – Vista 3D .....	32
Figura 5-16 – Traçado da ponta do pêndulo até 1.5s – Vista 2D .....	32
Figura 5-17 - Exemplos de estruturas ósseas em elementos finitos .....	35
Figura 5-18 - Modelamento da coxa em elementos finitos .....	38
Figura 6-1 - Modelo pêndulo duplo com corpo flexível – posição vertical .....	41
Figura 6-2 – Esquema do modelo flexível com 2 elementos .....	41
Figura 6-3 - Deslocamentos da parte flexível - posição vertical .....	42
Figura 6-4 - Pêndulo flexível a 5° .....	43
Figura 6-5 - Respostas do pêndulo flexível em oscilação livre. Posição inicial 5° .....	43
Figura 6-6 - Pêndulo flexível ortogonal – condição inicial .....	44
Figura 6-7 - Respostas pêndulo flexível ortogonal .....	44
Figura 6-8 - Deformações no instante do pico 1 ( $t=0,27s$ ) .....	45
Figura 6-9 - Deformações no instante do pico 2 ( $t=0,59s$ ) .....	45
Figura 6-10 - Deformações no instante do pico 3 ( $t=1,09s$ ) .....	45
Figura 9-1 - Superposição modal .....	49
Figura 9-2 - Vetor posição do ponto P' no corpo flexível após a deformação .....	56



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 - Histórico evolutivo das teorias e princípios utilizados em dinâmica.....	7
Tabela 5-1 - Parâmetros do modelo.....	16
Tabela 5-2 - Frequências naturais obtidas pelo MotionSolve .....	28
Tabela 5-3- Quadro comparativo das frequências naturais obtidas.....	28
Tabela 5-4 - Frequências naturais calculadas com o solver de elementos finitos OptiStruct .....	38
Tabela 5-5 - Comparação das frequências naturais do componente .....	39

## 1 INTRODUÇÃO

O termo multicorpos se destaca como um termo genérico que engloba uma ampla gama de sistemas tais como mecanismos, automóveis e caminhões (incluindo sistemas de direção, suspensões, etc.), robôs, trens, máquinas industriais (têxtil, de embalagens, etc.), estruturas espaciais, antenas, satélites, o corpo humano, entre outros.

Com o aumento do poder de cálculo e redução nos custos, o uso do computador para simulação cinemática e dinâmica tem emergido como uma poderosa ferramenta para a análise e projeto de sistemas multicorpos em ramos como a indústria automobilística, aeroespacial, da robótica, máquinas, biomecânica, entre outros.

A atenção recebida recentemente pode ser medida pela quantidade de programas CAE (Computer Aided Engineering) que se proliferam no mercado de engenharia, um fenômeno semelhante ao produzido pelo método dos elementos finitos no início dos anos oitenta para projetos estruturais. Formulações eficazes para a dinâmica e confiáveis métodos computacionais desempenham um papel fundamental na concretização da confiabilidade das ferramentas de análise multicorpos [1].

Reduções do tempo de projeto e dos custos envolvidos principalmente pela diminuição da quantidade de protótipos físicos construídos e que agora têm foco na validação da simulação computacional além da possibilidade de otimização das soluções são os grandes atrativos para a indústria.

Pelo rápido surgimento das ferramentas de análise multicorpos criou-se um vácuo de mão de obra capacitada para fazer proveito da nova tecnologia, principalmente em nosso país.

Os programas de análise multicorpos vêm sendo aprimorados no sentido de permitir uma interface mais amigável e intuitiva para o usuário. Há poucos anos se quer existiam interfaces gráficas na análise computacional o que exigia do usuário, além da habilidade em operar o programa, um conhecimento mais aprofundado dos fundamentos teóricos, tanto para implementar o problema quanto para interpretar os resultados.

Com as facilidades introduzidas principalmente com as interfaces gráficas, os softwares ficaram muito mais acessíveis passando a falsa sensação de que os

fundamentos teriam agora menor importância o que é extremamente perigoso no tratamento do problema.

É preciso saber prever resultados, conhecer as limitações e operar com os parâmetros de simulação para obter uma correlação aceitável com a realidade.

Por outro lado os fundamentos teóricos, bastante consolidados em relação aos sistemas multicorpos, são apresentados ainda da forma tradicional sem buscar uma ligação com as ferramentas modernas que estão surgindo.

Um propósito deste trabalho é então construir um material que sirva de base para o início na área de dinâmica multicorpos, apresentando de forma sintética os fundamentos teóricos da dinâmica e também do cálculo computacional fazendo uma ligação direta com os principais recursos e capacidades da análise computacional da dinâmica multicorpos.

## **2 OBJETIVO**

O objetivo deste trabalho é estudar um modelo de pêndulo duplo com vistas a um modelo bípede e compreender as técnicas de multicorpos desde o fenômeno físico, passando pela modelagem matemática, métodos de solução, finalizando com a implementação em um programa comercial de multicorpos.

Desta forma serão expostos os passos mais relevantes para solução de um problema de multicorpos, como modelamento em espaço de estado, integração numérica, determinação de frequências naturais do sistema, componentes e será feita uma introdução ao uso de corpos flexíveis em sistemas multicorpos.

## **3 ESTADO DA ARTE**

Os problemas de multicorpos são resolvidos usando a abordagem de divisão para simplificação, ou seja, fragmentar sistemas complexos em blocos mais simples, e então em blocos ainda mais simples, e assim por diante. Os problemas de síntese são resolvidos começando com blocos conhecidos, e procurando formas de colocá-los em conjunto para alcançar comportamentos complexos.

### 3.1 PROBLEMAS TÍPICOS

Profissionais da indústria muitas vezes queixam-se de que os softwares são usados sem a devida atenção. Com frequência essas queixas são justificadas. Questiona-se o porquê de empregar o tempo e esforço, além de dinheiro, com o uso dessas ferramentas se os resultados não ajudam o engenheiro. Para piorar a situação, o uso das ferramentas pode até mesmo dar respostas longe das metas de projeto reais. Claro que essa crítica potencial de ferramentas CAE se aplica a todas as ferramentas computacionais. A modelagem do problema e interpretação dos resultados deve ser muito criteriosa. Assim, antes de rever a teoria, é útil vermos algumas áreas de aplicação e as questões relevantes para a modelagem e análise da dinâmica multicorpos.

### 3.2 ALGUMAS ÁREAS DE APLICAÇÃO

#### Máquinas operatrizes

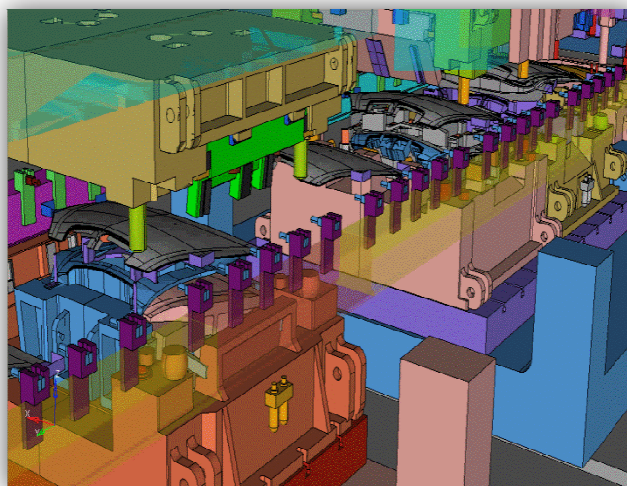


Figura 3-1 - Aplicação de multicorpos em manufatura

Máquinas operatrizes no que tange sua parte mecânica são muitas vezes consideradas como uma tecnologia ultrapassada, que em certo sentido, elas até são, pois o crescimento da utilização dessas máquinas remete principalmente aos anos entre 1860 e 1960. Mas isso não significa que a tecnologia é trivial ou que projetá-las é uma tarefa simples. Comum a todas elas, há um objetivo principal: um grau de precisão especificado. Para isso, o mecanismo deve produzir movimentos variáveis e permitir o controle sobre esses movimentos. Condições de operação podem geralmente ser mantidas dentro de uma gama especificada, particularmente se o projetista puder

demonstrar uma ligação entre as condições de funcionamento e a precisão da máquina. Questões típicas em um projeto deste tipo de equipamento são sua vida útil e o seu custo. Do ponto da dinâmica de multicorpos, os modelos podem calcular e prever forças, localização de vários pontos ao longo do tempo e duração de operações.

### **Máquinas de embalagens**

Esta classe abrange as máquinas que podem fazer operações tais como acondicionamento, rotulagem, dobra empilhamento e impressão. Se considerarmos que quase todos os bens desde a pasta de dentes até os automóveis devem ser embalados, o tamanho desta indústria é destacável. As preocupações ambientais estão levando a mudanças nos materiais utilizados, o que forçou os desenvolvedores a exercerem a sua criatividade. De um ponto de vista distante, as máquinas de embalagem são semelhante às máquinas operatrizes. As condições de operação devem ser controladas e o movimento preciso e automático. As diferenças decorrem, principalmente, da escala de uso. Máquinas de embalagem aplicam-se principalmente para a produção de itens onde o volume de produção é extremamente alto. Isto significa que a abordagem do projeto muitas vezes pode sacrificar a versatilidade do movimento para a economia e precisão. É uma vez que a escala de produção das mercadorias a serem embalados é muito grande, o projeto centra-se no tempo de movimento. Um projeto que reduz o tempo de enchimento em um segundo pode ser muito atraente se o tempo de enchimento por pacote é da ordem de segundos. Na indústria farmacêutica, por exemplo, velocidades de 200.000 cápsulas por hora não são incomuns.

### **Motores a combustão**



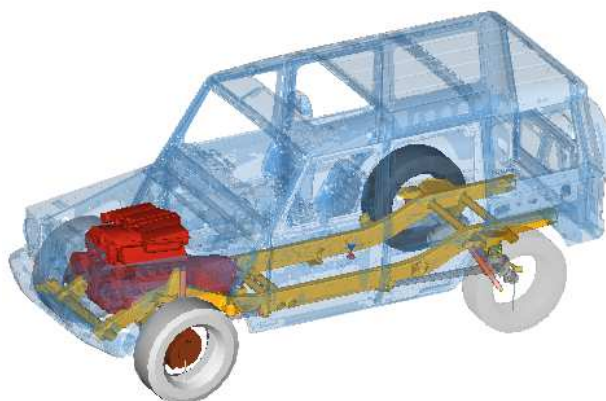
**Figura 3-2 - Aplicação de multicorpos a motores a combustão**

O projeto de um motor a combustão é uma área multidisciplinar que abrange transferência de calor, combustão, vibrações, etc.. As condições de operação são menos

previsíveis do que para as máquinas citadas anteriormente, então os engenheiros muitas vezes têm de investigar e permitir operações severas. Gamas recomendadas de operação são normalmente fornecidas, tal como o limite de rotação "red-line" para motores de combustão interna. De uma perspectiva da dinâmica multicorpos, a rotação de "red-line" é um parâmetro interessante. Se um motor de 4 tempos funciona a uma velocidade superior à recomendada, a força exercida sobre as molas de retorno das válvulas pode ser alta o suficiente para que elas não retornem no tempo desejado, fenômeno conhecido como "float". Isto, por sua vez, leva à perda de rendimento.

O interesse de uma análise de multicorpos está ligado ao cálculo de forças nos componentes em várias condições de operação. Estas forças são então utilizadas para realizar o cálculo de tensões e verificações de fadiga. Motores modernos também exigem formas bastante sofisticadas de controle de movimento. Motores de alto desempenho, por exemplo, podem alterar os tempos de abertura das válvulas em função da condição de operação do motor.

### **Veículos, aviões, trens, navios...**

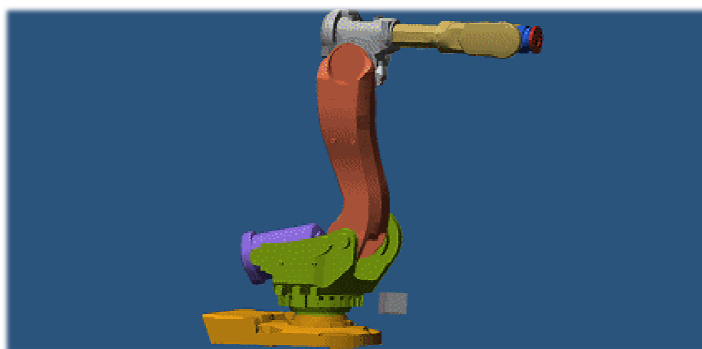


**Figura 3-3 - Aplicação de multicorpos a um veículo completo**

Agrupar carros, caminhões, ônibus, motocicletas, bicicletas, navios, aviões e naves espaciais em um grupo é, obviamente, uma simplificação, mas que é bastante apropriada a partir da perspectiva de multicorpos. Os graus de complexidade variam de uma dúzia de peças em uma bicicleta para milhares de peças em veículos maiores. Esses veículos têm, porém, exigências bastante similares: estabilidade, conforto, segurança e (na maioria, mas não em todos os casos) economia de operação. O primeiro

requisito, a estabilidade, é de particular interesse. Uma vez que as condições de funcionamento tendem a variar largamente, um grande esforço é feito para proporcionar um controle eficaz sobre o comportamento do veículo. Lembrando que o movimento é razoavelmente previsível. O que é imprevisível são os comandos que o condutor aplica, as condições que a pista fornece, e assim por diante. Projetos modernos têm tido um aumento constante na quantidade de eletrônica embarcada usada para ajudar a conduzir o veículo com segurança.

## **Robótica**



**Figura 3-4 - Aplicação de multibody em automação**

A parte mecânica de um robô é o problema clássico de síntese de mecanismos, ou seja, como montar elementos mecânicos que podem descrever movimentos pré-determinados. Em vários casos, a inspiração é traçada a partir da biologia, assemelhando-se a articulações humanas ou de animais. Deve-se, então, traçar os movimentos, prever a velocidade de diferentes partes do conjunto e prever as forças que serão experimentadas e que podem ser gerada pelo robô. Um elevado grau de integração com sistemas de controle eletrônico também é essencial dado o estado atual da tecnologia da robótica.

### **3.3 MODELAMENTO COM MULTICORPOS**

Num projeto de um produto com certo grau de complexidade, duas abordagens distintas podem ser feitas: a primeira sobre o comportamento de um componente e a outra sobre a perspectiva da dinâmica de um sistema. É preciso entender claramente suas diferenças, bem como a interação que existe entre elas. A análise do comportamento do componente é muitas vezes feita usando ferramentas baseadas no método dos elementos finitos. É, portanto, necessário conhecer os carregamentos que

servem de condição de contorno para este tipo de análise. Já o estudo do comportamento do sistema é melhor realizado usando a abordagem de multicorpos. Uma vantagem é que as forças calculadas a partir de uma análise de multicorpos podem ser usadas para fornecer dados para uma análise do componente. Modelos de multicorpos trazem uma perspectiva simplificada do componente. Ele pode, por exemplo, ser representado apenas como um corpo rígido trazendo apenas informações de suas inércias e centro de massa, por mais complexa que seja a sua geometria. Neste caso os cálculos envolvidos ficam bastante simplificados, pois envolvem as leis de Newton e seus formalismos decorrentes. Computacionalmente, enquanto uma análise de elementos finitos pode demorar desde minutos até dias, uma análise de multicorpos normalmente leva segundos para o cálculo.

A abordagem de modelos complexos construídos a partir de modelos mais simples é a essência dos sistemas de multicorpos.

### 3.4 TEORIA BÁSICA

No passado, a obtenção das equações dinâmicas de movimentos para sistemas mecânicos era realizada manualmente, através da aplicação de princípios físicos em suas variadas formas [2].

Partindo-se das Leis de Newton, foram desenvolvidas várias maneiras de se obter essas equações que representam o comportamento dinâmico de um sistema mecânico. A evolução histórica dessas teorias aconteceu de forma gradual, sendo que seus principais fatos são resumidos na Tabela 3-1.

**Tabela 3-1 - Histórico evolutivo das teorias e princípios utilizados em dinâmica**

1687	Newton	A partícula livre, o elemento mais simples de um sistema multicorpo, é o tema das <b>Equações de Newton</b> .
1743	d'Alembert	Sistema de corpos vinculados, com separação entre forças de ação e reação.
1775	Euler	Introdução de corpos rígidos. As vinculações são modeladas com o Princípio do Corpo Livre nas <b>Equações de Newton-Euler</b> .
1788	Lagrange	Aplicação do Princípio Variacional considerando os vínculos cinemáticos do sistema. Os resultados para as coordenadas generalizadas são as <b>Equações de Lagrange</b> .
1913	Jourdain	Extensão do Princípio de d'Alembert para sistemas holonômicos
1977	Kane e Levinson	Introdução de velocidades generalizadas para sistemas não holonômicos, resultando em uma descrição compacta de sistemas multicorpos.



A evolução da ciência e da tecnologia, por outro lado, possibilitou a construção de sistemas mecânicos cada vez mais complexos e detalhados. Para criar modelos numéricos que representassem adequadamente esses sistemas e sua crescente complexidade, tornou-se necessário o desenvolvimento de ferramentas que gerassem de forma automática as equações de movimento. Foi dentro desse contexto que, a partir da década de 1980, ganharam espaço no universo das análises dinâmicas os sistemas multicorpos (multibody systems – MBS). De forma semelhante à década anterior, quando o método de elementos finitos rapidamente difundiu-se para as análises estruturais, repetia-se para a técnica de MBS o fenômeno de popularização, dessa vez para as análises transientes.

Originalmente, a técnica de multicorpos foi desenvolvida para gerar o modelo matemático de qualquer sistema mecânico que pudesse ser modelado fisicamente como um conjunto de corpos rígidos. Recentemente, com o avanço das tecnologias de processamento e armazenamento de dados, permitiu-se também a inclusão de corpos flexíveis (deformáveis) nos modelos. Todos esses corpos são interligados por juntas, influenciados por forças, direcionados por movimentos prescritos e limitados por restrições.

### **3.5 DEFINIÇÕES**

#### **3.5.1.1 Estática, Cinemática e Dinâmica**

A mecânica pode ser dividida em três ramos: estática, dinâmica e cinemática. A estática abrange os efeitos das forças sobre os corpos na ausência de movimento. A dinâmica é o estudo da ação das forças sobre os corpos em movimento. A cinemática é o estudo do movimento relativo entre os corpos. Muitas vezes é utilizada a cinemática para determinar o projeto inicial para atingir o movimento desejado e não há nenhuma referência à massa ou forças. Por exemplo, pode ser utilizada para calcular o movimento necessário para um robô para realizar certa tarefa. Enquanto a dinâmica pode prever as forças necessárias para este movimento [3].

#### **3.5.1.2 Mecanismo**

Denomina-se mecanismo a um conjunto de elementos rígidos, móveis uns relativamente a outros, unidos entre si mediante diferentes tipos de junções, chamadas

pares cinemáticos, cujo propósito é a transmissão e/ou transformação de movimentos e forças. São, portanto, as abstrações teóricas do funcionamento dos sistemas reais.

### **3.5.1.3 Conservação da quantidade de movimento linear**

Na ausência de forças externas, a velocidade de um corpo ou um conjunto de corpos permanece constante. Quando aplicada uma força, a relação com a aceleração é representada pela equação  $F = ma$ . Outra forma de descrever é dizer que a força envolvida numa colisão é igual à taxa de variação do momento. Colisões podem ser elásticas ou inelásticas. Colisões elásticas conservam a energia cinética, mas colisões inelásticas não. Ambas, naturalmente, conservam o impulso. O coeficiente de restituição é uma medida da elasticidade da colisão. Ele é adimensional, uma vez que é a razão entre as diferenças nas velocidades antes da colisão e depois da colisão, sendo 1 para uma colisão perfeitamente elástica e 0 para uma colisão inelástica.

### **3.5.1.4 Conservação do momento angular**

A lei da conservação da quantidade de momento linear quando aplicada ao movimento angular, conduz a equação  $T = I \alpha$ , onde  $T$  é o binário,  $I$  é o momento de inércia em torno do eixo de rotação, e  $\alpha$  é a aceleração angular.

### **3.5.1.5 Graus de Liberdade**

Graus de liberdade é um termo genérico utilizado em referência a quantidade mínima de números reais necessários para determinar completamente o estado físico de um dado sistema.

Calcular o número de graus de liberdade de um mecanismo não é uma tarefa trivial, como veremos adiante quando discutirmos as equações de Gruebler. Um corpo rígido no espaço tridimensional tem 6 graus de liberdade, ou seja, translação ao longo dos 3 eixos, e rotações sobre os 3 eixos.

### **3.5.1.6 Restrições**

Uma restrição é uma condição que remove um ou mais graus de liberdade. Em multicorpos, uma restrição é geralmente imposta definindo uma junta. Por exemplo, se um sistema consiste de 2 corpos que não estão ligados um ao outro, o sistema tem 12 graus de liberdade (6 para cada corpo). Se eles estão ligados por uma junta, no entanto, o número de graus de liberdade será inferior a 12. Se o número de restrições é mais do que os graus de liberdade do sistema, ele é descrito como sobrerrestrito. Um sistema

excessivamente restrito normalmente não pode ser usado em uma análise de multicorpos. Computacionalmente os softwares de multicorpos descartam as restrições desnecessárias.

### **3.5.1.7 Articulações ou juntas**

Do ponto de vista matemático, uma junta é apenas uma restrição que relaciona o movimento entre um ou mais graus de liberdade de um ou mais corpos. No contexto da modelagem multicorpos, uma articulação é geralmente definida utilizando um equivalente físico. A maioria das juntas elimina um ou mais graus de liberdade. No entanto, se a junta é redundante, ela não afeta os graus de liberdade do sistema. Juntas redundantes também são chamadas de juntas passivas e sua presença ou ausência não faz qualquer diferença para o comportamento do mecanismo.

### **3.5.1.8 Equação Gruebler e o Critério Kutzbach**

Calcular os graus de um sistema muitas vezes não é uma tarefa fácil. Se o movimento se restringe a um plano (isto é, se temos um mecanismo planar), podemos usar a Equação de Gruebler:  $F = 3(n-1) - 2l - h$ , onde  $F$  são os graus de liberdade totais do mecanismo,  $n$  é o número de juntas,  $l$  é o número de pares de inferiores e  $H$  é o número de pares mais elevadas. Deve-se ter cuidado ao usar a fórmula, ela não é infalível no sentido de que não pode ser aplicada cegamente, mas precisa de algum julgamento.

### **3.5.1.9 Tipos de Análise**

Com base nas entradas de simulação do modelo, os softwares de multicorpos formulam as equações de movimento que caracterizam o sistema. Os diversos tipos de simulação se referem ao processo de resolver estas equações computacionalmente.

Os softwares de multicorpos fornecem basicamente os seguintes tipos de simulação:

#### **Transiente**

Pode ser realizada em sistemas com zero ou mais graus de liberdade. Para sistemas com zero grau de liberdade, a simulação cinemática é usada. Para sistemas com mais do que zero graus de liberdade, a simulação dinâmica é usada.

#### **Cinemática**

Um modelo com zero graus de liberdade é definido como cinemático. As equações algébricas que definem as restrições impostas por várias articulações e movimentos aplicados especificam completamente o movimento do sistema. As restrições de tempo e seus derivados são usados para calcular o deslocamento, velocidade e acelerações. As equações de equilíbrio de força são utilizadas para calcular algebricamente as forças de reação de restrição. A solução é, portanto, de natureza algébrica.

### **Dinâmica**

A simulação dinâmica refere-se à integração numérica das equações diferenciais ordinárias e diferenciais algébricas. As equações algébricas resultam das restrições no modelo. É aplicável aos modelos com um ou mais graus de liberdade.

Ela considera as acelerações (linear, angular, centrífuga e de Coriolis), forças e restrições. Em outras palavras, ela resolve as equações do movimento em sua forma mais geral, incluindo os efeitos não lineares. Isto permite nos desenvolver simulações precisas de complexos sistemas mecânicos.

### **Simulação Estática**

A simulação estática é útil para encontrar as configurações de equilíbrio para os modelos com um ou mais graus de liberdade. O equilíbrio é definido como a configuração onde todas as forças e momentos agindo em todas as partes do modelo são iguais a zero. Dois métodos comuns para a simulação estática são o Maximum Kinetic Energy Attrition Method (MKEAM) e o Force Imbalance Method (FIM)

### **Quasi-Estática**

Fisicamente o método quasi-estático significa que o sistema está sendo conduzido muito lentamente de modo a não exercer qualquer dinâmica transitória.

Matematicamente, a simulação quasi-estática é uma sequência de simulações estáticas realizadas durante um período determinado. O método é útil quando o modelo contém forças dependentes do tempo e estamos interessados na sequência de configurações de equilíbrio que o modelo passa.

### **Linear**

Sistemas multicorpos quase sempre são não-lineares. Não-linearidades podem surgir a partir de elementos de forças com relações constitutivas não lineares, restrições ou cinemática. Em geral, os sistemas não-lineares são notoriamente difíceis de analisar. Em estudos de sistemas de controle, por exemplo, pode ser útil trabalhar com o modelo linearizado. Os softwares de multicorpos normalmente trazem ferramentas que permitem extrair as matrizes do modelo linearizado.

#### **3.5.1.10 Integração Numérica**

A equação diferencial de movimento é a seguinte:

$$Ma + cv + ku = f(t)$$

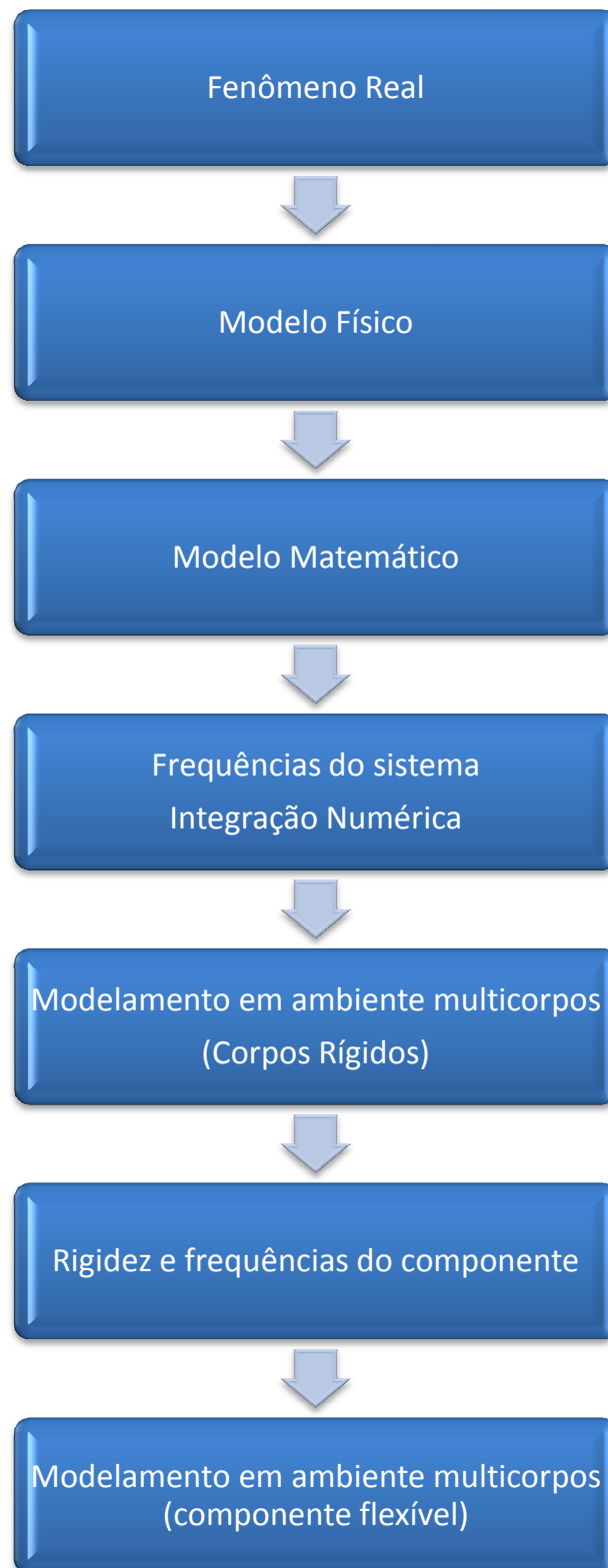
Onde,  $m$  é a massa,  $c$  o amortecimento,  $k$  a rigidez e  $a$ ,  $v$  e  $u$  são aceleração, velocidade e deslocamento.

Dado o estado inicial do corpo ou corpos, precisamos calcular os estados dos corpos ao longo do tempo. Isto é feito por integração numérica da equação de movimento.

## **4 METODOLOGIAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO**

Será proposto o estudo de um problema real de forma a apresentar todas as etapas idealizadas para o desenvolvimento deste trabalho. A partir da apresentação desta estrutura de abordagem, cada etapa será então descrita e explorada com maior profundidade.

O fluxo é apresentado a seguir.



**Figura 4-1 – Fluxo das soluções usadas neste trabalho**

## 4.1 FERRAMENTAS UTILIZADAS

A fase inicial deste projeto está focada em definirmos uma forma de abordagem para o tratamento de problemas de dinâmica multicorpos além nos familiarizarmos com algumas das ferramentas computacionais disponíveis.

Podemos citar aqui três programas que nos ajudam nesta caminhada.

O primeiro deles é o Mathematica desenvolvido pela Wolfram capaz de auxiliar no desenvolvimento e solução de equações com termos literais. Trata-se de uma importante alternativa às manipulações e resoluções meramente numéricas. O programa pode, por exemplo, realizar derivações, integrações e álgebra de matrizes com termos na forma literal. Seu uso poupa o engenheiro do trabalho maçante e com grande probabilidade de erros ao se manipular expressões matemáticas complexas e com elevado número de termos.

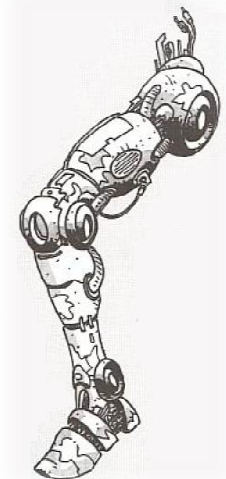
O segundo é o Scilab/Matlab, usado para computação numérica semelhante ao e que fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas.

O terceiro é o MotionView/MotionSolve/OptiStruct da empresa Altair Engineering que forma um ambiente de análise multicorpos e componentes. O primeiro serve de pré-processado (interface gráfica) dando de entrada os parâmetros a serem resolvidos matematicamente pelo solver (MotionSolve) que retorna os dados de saída a serem visualizados no pós-processador HyperView. Embora não seja gratuito, este software é disponibilizado sem custo para a Politécnica da USP através da parceria com o programa PACE (Partners for the Advancement of Collaborative Engineering Education)

Os três softwares são bastante complexos e com inúmeras funcionalidades a serem exploradas. Foge do escopo deste trabalho detalhar profundamente cada um deles. É importante, porém, termos uma visão geral da estrutura como cada um trabalha e também saber como proceder para simulações aplicadas a multicorpos.

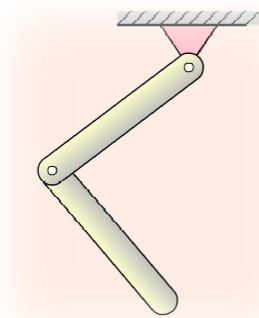
## 5 APRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA

O desafio é fazer um estudo do comportamento de uma perna tendo como elementos motrizes os esforços aplicados por joelho e quadril, interessando determinar a posição e velocidades dos membros coxa e canela a cada instante.



**Figura 5-1 - Modelo referência - membro inferior**

Começaremos por propor um modelo físico que ilustre o fenômeno. O pêndulo duplo é um exemplo simples que o representa.



**Figura 5-2 - Modelo simplificado - pêndulo duplo**

Temos dois corpos com massas e inércias definidas e articulados por juntas de revolução. Sobre o sistema age a gravidade e em cada junta há um motor que introduz torque ao sistema.

Os ângulos que serão usados de parâmetro bem como a posição dos motores são apresentados a seguir:



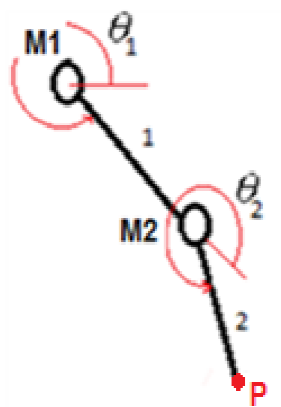


Figura 5-3 - Ângulos de referência adotados

O motor M1 (quadril) age com um torque sobre a barra 1 e o motor M2 (joelho) age com um torque de par ação e reação nas barras 1 e 2.

Iremos supor também amortecimentos nas articulações proporcionais às velocidades angulares.

Os parâmetros ficam definidos conforme a tabela a seguir.

Tabela 5-1 - Parâmetros do modelo

Parâmetro	Símbolo	Expressão	Valor (SI)
Altura da pessoa	H	-	1,75
Massa da pessoa	M	-	75,00
Comprimento das barras	L	$0,2645 \cdot H$	0,463
Posição do baricentro	LG	$L/2$	0,231
Massa da barra 1	$m_1$	$0,1 \cdot M$	7,50
Massa da barra 2	$m_2$	$0,0465 \cdot M$	3,49
Momentos de Inércia da barra 1	$I_{z1}$	$1/12 \cdot m_1 \cdot L^2$	2,917
Momentos de Inércia da barra 2	$I_{z2}$	$1/12 \cdot m_2 \cdot L^2$	1,356

## 5.1 MODELAMENTO DO SISTEMA PÊNDULO DUPLO EM ESPAÇO DE ESTADO

O equacionamento será feito com o uso da mecânica de Lagrange, método bastante empregado na modelagem da dinâmica multicorpos.

A mecânica de Lagrange ou mecânica lagrangiana é uma formulação da mecânica clássica que combina a conservação do momento com a conservação da energia e é baseada num formalismo escalar mais simples e geral, quando comparado ao formalismo vetorial de Newton [4].

De acordo com o teorema de Lagrange, temos:

$$T_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad L = E_c - E_p \quad (5.1)$$

Os Lagrangeanos de cada barra serão calculados separadamente, e depois somados.

-Barra1

$$E_{c1} = \frac{m_1}{2} \|\vec{V}_{G1}\|^2 + \frac{I_{z1}}{2} \dot{\theta}_1^2 \quad (5.2)$$

$$E_{p1} = m_1 g y_{G1} \quad (5.3)$$

Com isso, obtém-se o Lagrangeano da barra 1.

$$L_1 = \frac{m_1}{2} \|\vec{V}_{G1}\|^2 + \frac{I_{z1}}{2} \dot{\theta}_1^2 - m_1 g y_{G1} \quad (5.4)$$

Fazendo as substituições, temos:

$$L_1 = \frac{m_1}{2} L_{G1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{I_{z1}}{2} \dot{\theta}_1^2 - m_1 g L_{G1} \sin(\theta_1) \quad (5.5)$$

-Barra2

$$E_{c2} = \frac{m_2}{2} \|\vec{V}_{G2}\|^2 + \frac{I_{z2}}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (5.6)$$

$$E_{p2} = m_2 g y_{G2} \quad (5.7)$$

Assim, o Lagrangeano da barra 2 é dado por:

$$L_2 = \frac{m_2}{2} \|\vec{V}_{G2}\|^2 + \frac{I_{z2}}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - m_2 g y_{G2} \quad (5.8)$$

Substituindo as velocidades e fazendo as manipulações trigonométricas, o Lagrangeano da barra 2 é dado por:

$$L_2 = \frac{m_2}{2} \left[ L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_{G2}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2L_1 L_{G2} \cos(\theta_2) (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2) \right] + \frac{I_{z2}}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - m_2 g (L_1 \sin(\theta_1) + L_{G2} \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (5.9)$$

-Aplicação do método de Lagrange

-Barra1

$$T_1 - T_{1AMORTECIDO} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \theta_1}$$

$$T_1 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \theta_1} + B_1 * \dot{\theta}_1 \quad (5.10)$$

O que é igual à:

$$T_1 = \left[ m_1 L_{G1}^2 + m_2 (L_1^2 + L_{G2}^2 + L_1 L_{G2} \cos(\theta_2)) + I_{z1} \right] \ddot{\theta}_1 + \left[ m_2 (L_{G2}^2 + L_1 L_{G2} \cos \theta_2 + I_{z1} \theta_2 - m_2 L_1 L_{G2} \sin \theta_2 \theta_2 + 2 \theta_1 \theta_2 + m_1 g L_{G1} \cos \theta_1 + m_2 g L_1 \cos \theta_1 + L_{G2} \cos \theta_1 + \theta_2 + B_1 * \theta_1 \right] \quad (5.11)$$

-Barra2:

$$T_2 - T_{2AMORTECIMENTO} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \theta_2}$$

$$T_2 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial(L_1 + L_2)}{\partial \theta_2} + B_2 * \dot{\theta}_2 \quad (5.12)$$

O que é igual à:

$$T_2 = \left[ m_2 (L_{G2}^2 + L_1 L_{G2} \cos(\theta_2)) + I_{z2} \right] \ddot{\theta}_1 + \left[ m_2 L_{G2}^2 + I_{z2} \right] \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 L_{G2} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 g L_{G2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 L_1 L_{G2} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + B_2 * \dot{\theta}_2 \quad (5.13)$$

Vale ressaltar que  $T_1$  e  $T_2$  dependem das variáveis  $\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$  e  $\ddot{\theta}_2$ .

Portanto:  $T_1 = T_1(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2)$  e  $T_2 = T_2(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2)$ .

Vamos analisar inicialmente o sistema a partir da posição de equilíbrio estável, com as duas barras alinhadas na vertical, ( $\theta_1 = -\pi/2$  e  $\theta_2 = 0$ ), ou seja, quando a pessoa está em pé com a perna sem contatar o solo.

Temos as expressões que relacionam os toques  $T_1$  e  $T_2$  com os ângulos e velocidades angulares que foi encontrada com o uso do Mathematica

$$\ddot{\theta}_1 = f(T_1, T_2, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = f(T_1, T_2, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$$

Podemos fazer a integração numérica do sistema acima usando o método de Runge Kutta descrito a seguir.

Seja um problema de valor inicial especificado como:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Então o método para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

onde  $y_{n+1}$  é a aproximação por RK4 de  $y(t_{n+1})$ , e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Então, o próximo valor ( $y_{n+1}$ ) é determinado pelo valor atual ( $y_n$ ) somado com o produto do tamanho do intervalo ( $h$ ) e uma inclinação estimada. A inclinação é uma média ponderada de inclinações:

$k_1$  é a inclinação no início do intervalo;

$k_2$  é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação  $k_1$  para determinar o valor de  $y$  no ponto  $t_n + h/2$  através do método de Euler;

$k_3$  é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação  $k_2$  para determinar o valor de  $y$ ;

$k_4$  é a inclinação no final do intervalo, com seu valor  $y$  determinado usando  $k_3$ .

Ao fazer a média das quatro inclinações, um peso maior é dado para as inclinações no ponto médio:

O método RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de  $h^5$ , enquanto o erro total acumulado tem ordem  $h^4$ .

Note que as fórmulas acima são válidas tanto para funções escalares quanto para funções vetoriais como no caso em estudo.

## 5.2 VALIDAÇÃO E SOLUÇÕES DO MODELO – FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA

Para efeito de verificação das frequências naturais do sistema bem como validação do modelo matemático em espaço de estado desenvolvido anteriormente, vamos apresentar quatro formas de cálculo das frequências e fazer uma comparação dos valores encontrados.

### 5.2.1 - DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO PÊNDULO DUPLO

O Lagrangeano desenvolvido em 5.12 com uso de deslocamentos angulares  $\phi_1$  e  $\phi_2$  (para facilitar a manipulação algébrica) mostrados abaixo e torques de entrada nulos, pode ser apresentado da seguinte forma:

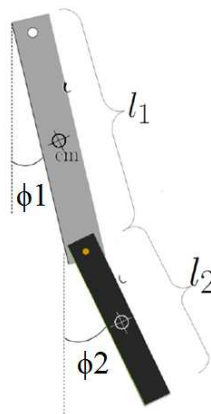


Figura 5-4 - Ângulos para determinação das frequências naturais

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_2^2 + m_2d_2l_1\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - [\frac{1}{2}m_1gd_1\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_1\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gd_2\phi_2^2].$$

Que para pequenos ângulos e  $L_1=L_2=L$  pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}(m_2 l_1^2 + I_1) \ddot{\phi}_1 + m_2 d_2 l_1 \ddot{\phi}_2 &= -(m_1 g d_1 - m_2 g l_1) \phi_1 \\ m_2 d_2 l_1 \ddot{\phi}_1 + I_1 \ddot{\phi}_2 &= -m_2 g d_2 \phi_2\end{aligned}$$

Podemos notar que o sistema tem a forma análoga a  $m\ddot{x} + kx = 0$  e conseguimos expressá-lo em função de suas frequências naturais por:

$$\begin{aligned}& [I_1 I_2 + m_2 l_1^2 I_2 - m_2^2 d_2^2 l_1^2] \omega^4 \\ & - [m_1 g d_1 I_2 + m_2 g l_1 I_2 + m_2 g d_2 I_1 + m_2^2 g d_2 l_1^2] \omega^2 \\ & + m_1 m_2 g^2 d_1 d_2 + m_2^2 g^2 d_2 l_1 = 0.\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema via Matlab (rotina mostrada no apêndice – Rotina em Matlab para cálculo das frequências analíticas) , temos:

$$\mathbf{f1=0,6566\ Hz}$$

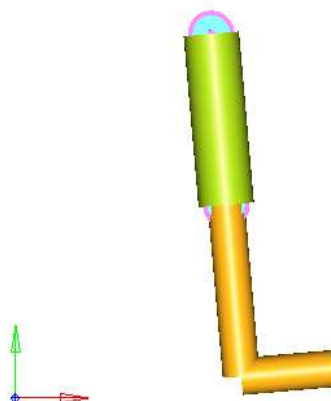
$$\mathbf{f2=1,4571\ Hz}$$

### 5.2.2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ATRAVÉS DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Vamos calcular dois gráficos de deslocamentos angulares em função do tempo usando o modelo de espaço de estado e integrando o sistema em espaço de estado – não linear - no tempo. A partir destes gráficos vamos fazer a transformada de Fourier e analisar no domínio da frequência.

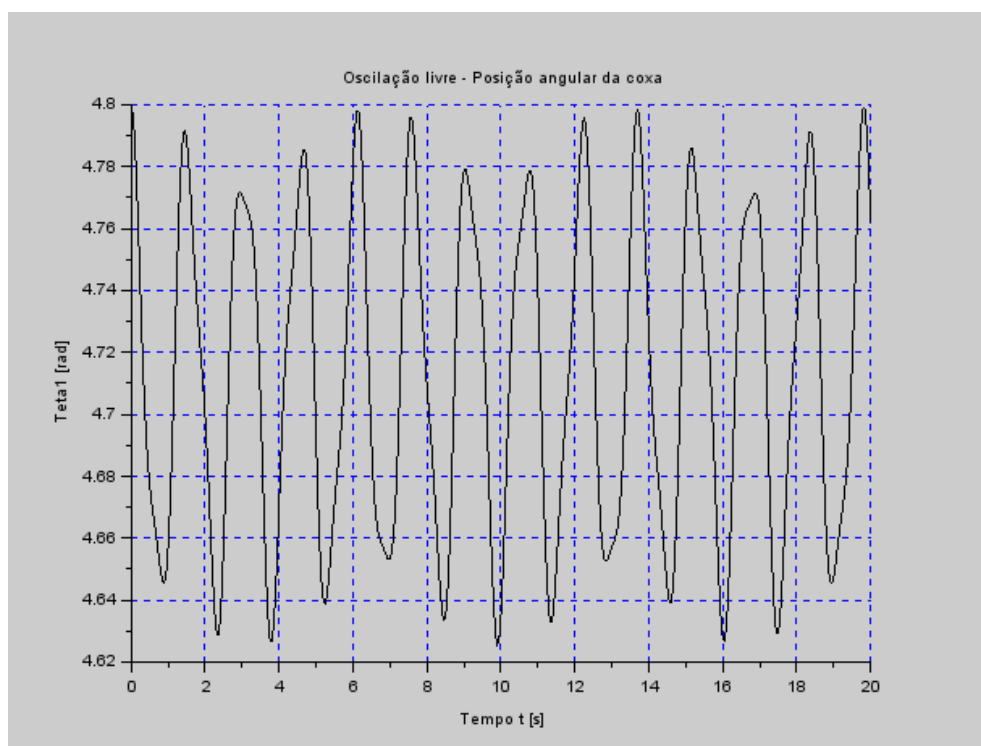
A implementação computacional do processo de integração numérica será realizada no programa Scilab, usando a função ODE que realiza a integração numérica a partir de condições iniciais fornecidas. O comando ODE é um solucionador de equações ordinárias e selecionamos o método de integração numérica Runge-Kutta descrito anteriormente.

Inicialmente os pêndulos foram colocados alinhados e inclinados 5 graus em relação à vertical com velocidade inicial nula.



**Figura 5-5 - Pêndulos inclinados alinhados a 5° da posição de equilíbrio**

Os gráficos dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  no tempo são apresentados a seguir:



**Figura 5-6 - Posição da coxa - integração do sistema em espaço de estado (não linear)**

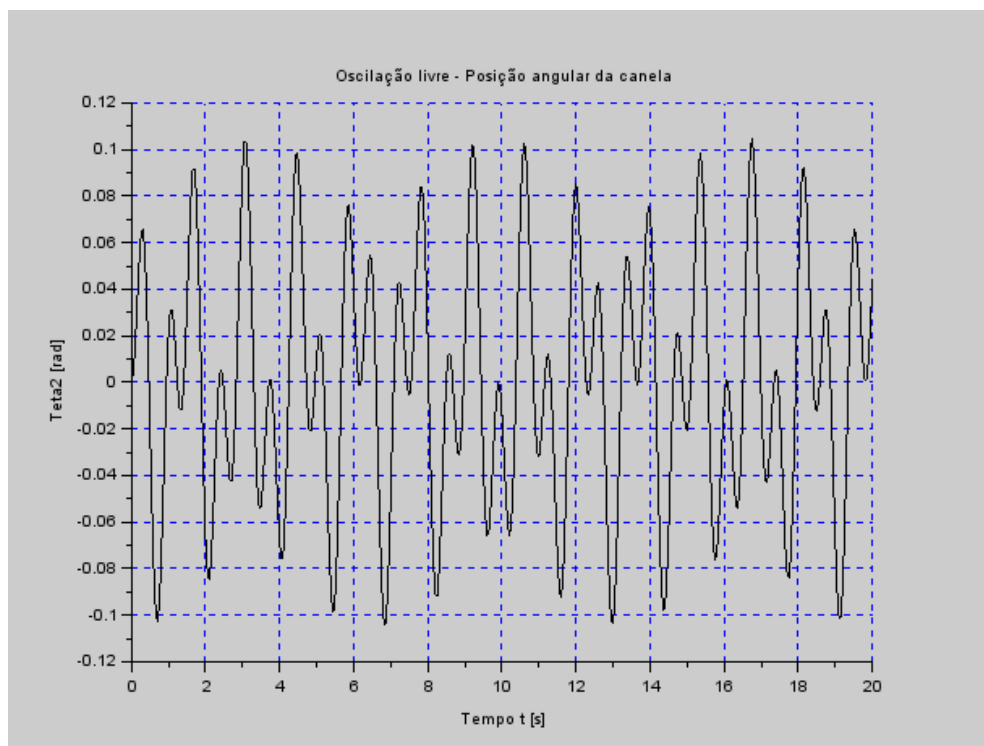


Figura 5-7 - - Posição da canela - integração do sistema em espaço de estado (não linear)

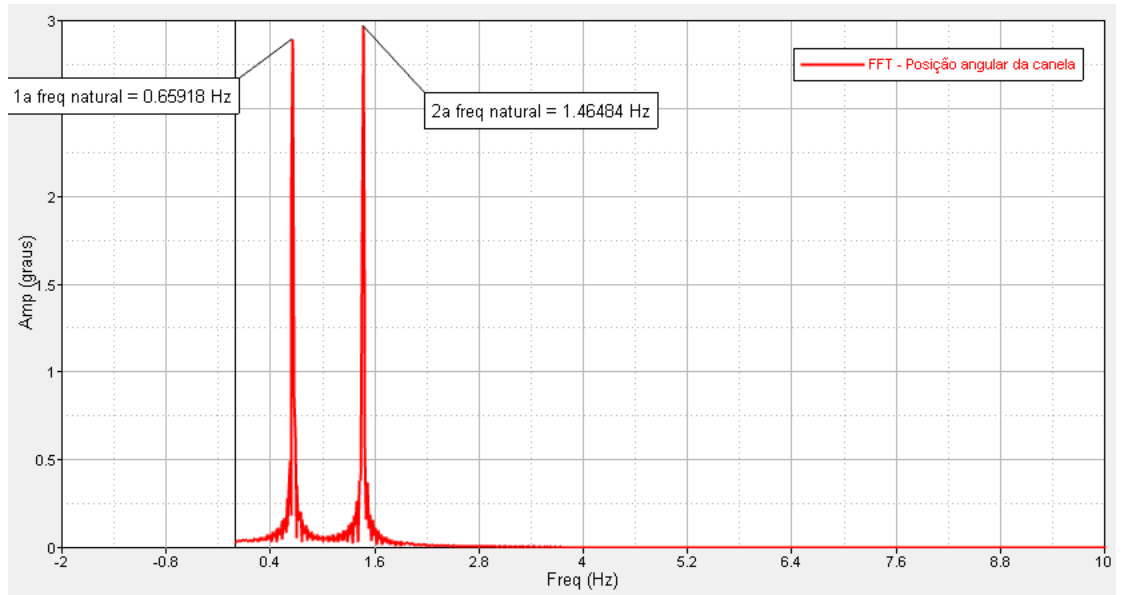
Os gráficos acima podem ser analisados no domínio da frequência usando a transformada rápida de Fourier.

A transformada de Fourier é, em essência, uma ferramenta matemática que realiza a transição entre as variáveis tempo e frequência de sinais [6].

A transformada rápida de Fourier ou FFT (Fast Fourier Transform) faz a conversão do domínio do tempo para o da frequência utilizando reduzido recurso computacional.

Os gráficos de FFT dos ângulos do pendulo durante a oscilação são apresentados a seguir:





**Figura 5-8 - FFT do deslocamento da canela**

Nota-se que os picos de frequência estão bastante destacados, são em número de dois, indicando 2 modos de vibrar, e apresentam valores de 0,65918 Hz para a primeira frequência e 1,4684 Hz para a segunda frequência.

### 5.2.3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ATRAVÉS DAS MATRIZES DE ESTADO LINEARIZADAS

É possível escrever a linearização utilizando a expansão por série de Taylor de primeira ordem ao mesmo tempo em que se obtém o espaço de estados, utilizando o jacobiano. Para utilizar esta ferramenta, deve-se escrever o vetor de estados como sendo a variação em relação à condição de operação, ou seja:

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \overline{\dot{\theta}_1} \\ \dot{\theta}_2 - \overline{\dot{\theta}_2} \\ \theta_1 - \overline{\theta_1} \\ \theta_2 - \overline{\theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Onde  $\overline{\dot{\theta}_1}$ ,  $\overline{\dot{\theta}_2}$ ,  $\overline{\theta_1}$  e  $\overline{\theta_2}$  são os valores (constantes) da condição de operação e são dados a seguir.

$\overline{\dot{\theta}}_1$  = Velocidade angular da coxa na condição de operação = 0.

$\overline{\dot{\theta}}_2$  = Velocidade angular da canela na condição de operação = 0.

$\overline{\theta}_1$  = Posição angular da coxa na condição de operação =  $3\pi/2$ .

$\overline{\theta}_2$  = Posição angular da canela na condição de operação = 0.

Assim, a matriz A, para linearizar as equações, é dada pelo Jacobiano de  $X(\dot{t})$  em relação ao vetor  $X(t)$ , no ponto de operação. Logo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Novamente, o programa *Mathematica* calculou as derivadas no ponto de operação. Os valores finais dos elementos da matriz A são dados a seguir. O seu desenvolvimento está na rotina em anexo.

$$A = \begin{bmatrix} -0.692614 & 1.03658 & -29.0599 & 16.4172 \\ 1.72763 & -3.7836 & 40.8148 & -72.6212 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, a matriz B é dada pelo Jacobiano de  $X(\dot{t})$  em relação ao vetor  $u(t)$ , também no ponto de operação. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial T_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial T_2} \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial T_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial T_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial T_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial T_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial T_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial T_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial T_2} \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial T_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial T_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o auxílio do programa *Mathematica*, obteve-se a matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 1.38523 & -3.45525 \\ -3.45525 & 12.612 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se deseja analisar as respostas das posições e velocidades angulares, a matriz C é a matriz diagonal unitária. Como neste sistema não há alimentação direta, a matriz D é nula. Logo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale lembrar que neste método de resolução da linearização e de espaço de estados, os vetores de estado, de resposta e de entrada são representados pela variação em relação à condição de operação. Ou seja:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \overline{\dot{\theta}_1} \\ \dot{\theta}_2 - \overline{\dot{\theta}_2} \\ \theta_1 - \overline{\theta_1} \\ \theta_2 - \overline{\theta_2} \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \overline{\dot{\theta}_1} \\ \dot{\theta}_2 - \overline{\dot{\theta}_2} \\ \theta_1 - \overline{\theta_1} \\ \theta_2 - \overline{\theta_2} \end{bmatrix} \text{ e } u(t) = \begin{bmatrix} T_1 - \overline{T_1} \\ T_2 - \overline{T_2} \end{bmatrix}$$

Onde:

$\overline{T_1}$  = Torque do motor 1 (que age sobre a coxa) na condição de operação = 0 Nm.

$\overline{T_2}$  = Torque do motor 2 (que age sobre a canela) na condição de operação = 0 Nm.

Com todas as matrizes definidas, tem-se o espaço de estados com as equações linearizadas. Tem-se:

$$\dot{X}(t) = A * X(t) + B * u(t)$$

$$Y(t) = C * X(t) + D * u(t)$$

O sistema foi linearizado em torno da posição vertical, sendo representado a seguir pelas matrizes de estado A, B e C.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.692614 & 1.03658 & -29.0599 & 16.4172 \\ 1.72763 & -3.7836 & 40.8148 & -72.6212 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.38523 & -3.45525 \\ -3.45525 & 12.612 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

A análise é feita por meio dos pólos do sistema. Esses pólos são seus autovalores, ou seja, eles são as raízes do denominador da matriz de funções de transferências. Quando se utiliza o comando *pole(sys)* no programa *Matlab*, ele fornece os pólos do sistema. Os pólos são:

$$-0.0992 + 4.1237i$$

$$-0.0992 - 4.1237i$$

$$-2.1386 + 8.9477i$$

$$-2.1386 - 8.9477i$$

A frequência natural do sistema pode ser calculada através do módulo do valor complexo dos autovalores. Temos então duas frequências naturais apresentadas abaixo.

$$w1=4,1249 \text{ rad/s}$$

$$w2 = 9,1997 \text{ rad/s}$$

$$f1 = 0,6565 \text{ Hz}$$

$$f2 = 1,4642 \text{ Hz}$$

#### 5.2.4 – ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS ATRAVÉS DO SISTEMA LINEARIZADO USANDO SOLVER MOTIONSOLVE

Em geral, os solver de multicorpos apresentam um tipo de solução chamada linear que realiza o cálculo das matrizes de estado além dos autovalores, autovetores do

sistema, frequências naturais e modos de vibrar. Esses dados são apresentados na tabela a seguir:

**Tabela 5-2 - Frequências naturais obtidas pelo MotionSolve na solução do tipo linear**

NUMBER	NATURAL_FREQ (HZ)	DAMPING_RATIO	REAL (HZ)	IMAG_FREQ (HZ)
1	6.564054E-01	3.941140E-17	-2.586985E-17	6.564054E-01
1	6.564054E-01	3.941140E-17	-2.586985E-17	-6.564054E-01
2	1.464380E+00	1.794208E-17	-2.627402E-17	1.464380E+00
2	1.464380E+00	1.794208E-17	-2.627402E-17	-1.464380E+00

### 5.2.5 QUADRO GERAL COMPARATIVO ENTRE FREQUÊNCIAS NATURAIS:

A seguir temos um quadro comparativo das frequências naturais calculadas

**Tabela 5-3- Quadro comparativo das frequências naturais obtidas**

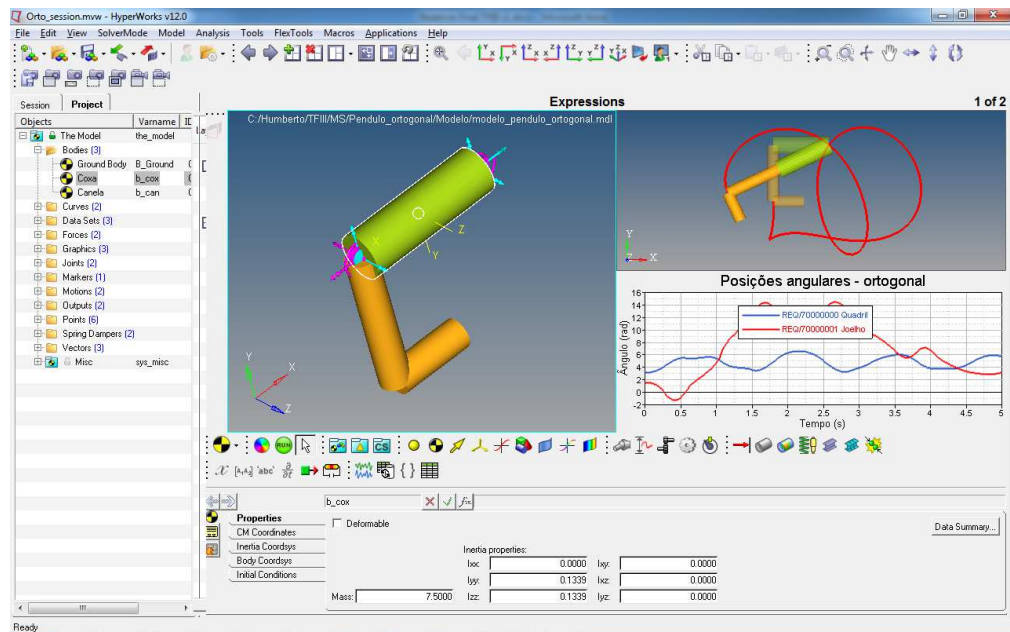
Método	1ª Frequência (Hz)	Erro relativo f1 (%)	2ª Frequência (Hz)	Erro relativo f2 (%)
1 -Analítico	0,6566	-	1,4571	-
2 - FFT	0,6592	0,3929	1,4648	0,5312
3 -Espaço de estado– Sistema linearizado	0,6565	-0,0152	1,4642	0,4873
4 - Sistema linear – Solver multicorpos	0,6564	-0,0305	1,4644	0,4996

Podemos notar que nos quatro métodos os valores de frequência natural ficaram bastante próximos com erros menos que 1% o que indica que para pequenos ângulos, o modelamento está coerente.

## 5.3 VALIDAÇÃO E SOLUÇÕES DO MODELO – GRANDES DESLOCAMENTOS

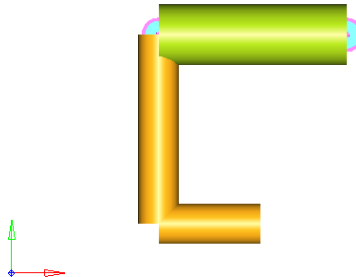
Além da comparação das frequências naturais do sistema, podemos também comparar o histórico das posições e velocidades angulares ao submeter o sistema a uma condição que fuja da linearidade usando tanto a solução desenvolvida nesse trabalho com o sistema na forma de espaço de estado e quanto a solução com o solver de multicorpos MotionSolve.

Foi projetado um o modelo físico de dois corpos articuladas por juntas de revolução nas extremidades com parâmetros de massas, inércias, gravidade, torque motor e dissipativo iguais aos do modelo matemático. A simulação é ilustrada a seguir.



**Figura 5-9 - Modelo do pêndulo duplo em ambiente MotionView**

Vamos aqui usar os pêndulos dispostos a 90 graus.



**Figura 5-10 - Posição inicial - grandes deslocamentos**

Abaixo temos os gráficos da posição angular da coxa (corpo superior do pêndulo), posição angular da canela (corpo inferior) e posições angulares da canela de coxa. O primeiro gráfico é referente à solução numérica por integração do sistema em espaço de estado com o Scilab (rotina no apêndice – Integração numérica não linear) e a segunda é a solução com o solver MotionSolve.

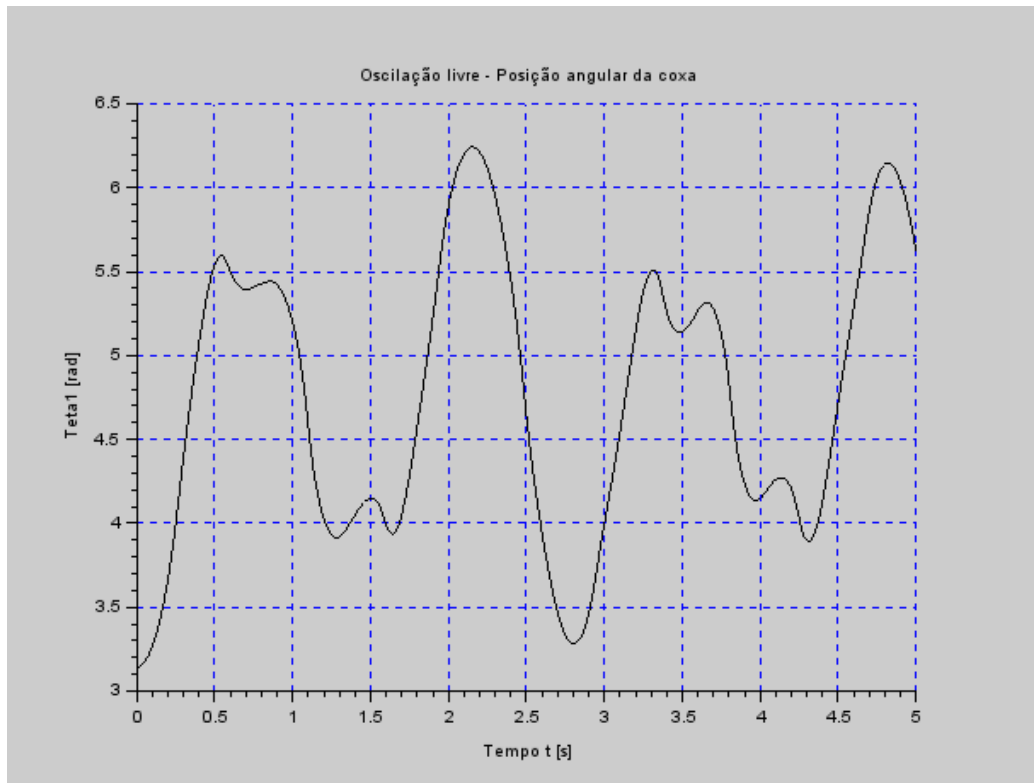


Figura 5-11 - Ângulo da coxa - grandes deslocamentos – integração do modelo não linear em espaço de estado

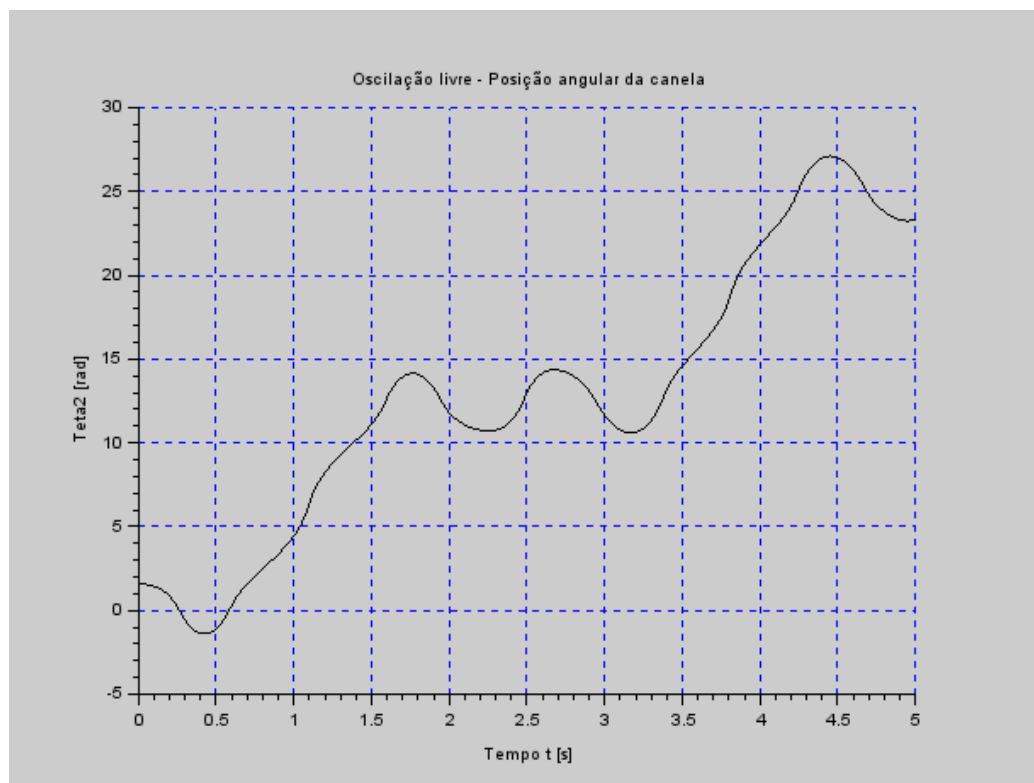


Figura 5-12 - Ângulo da canela - grandes deslocamentos – integração do modelo não linear em espaço de estado

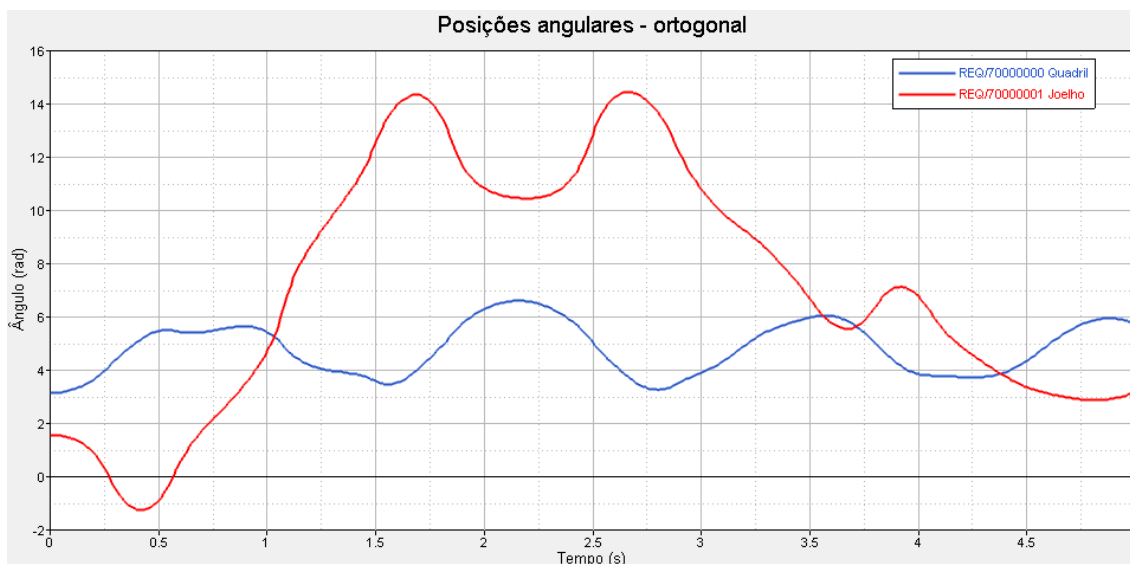


Figura 5-13 - Ângulos da coxa e canela sobrepostos - grandes deslocamentos – solução do solver MotionSolve

Podemos sobrepor os gráficos, comparando a solução do MotionSolve com a integração do sistema em espaço de estado, conforme mostrado abaixo.

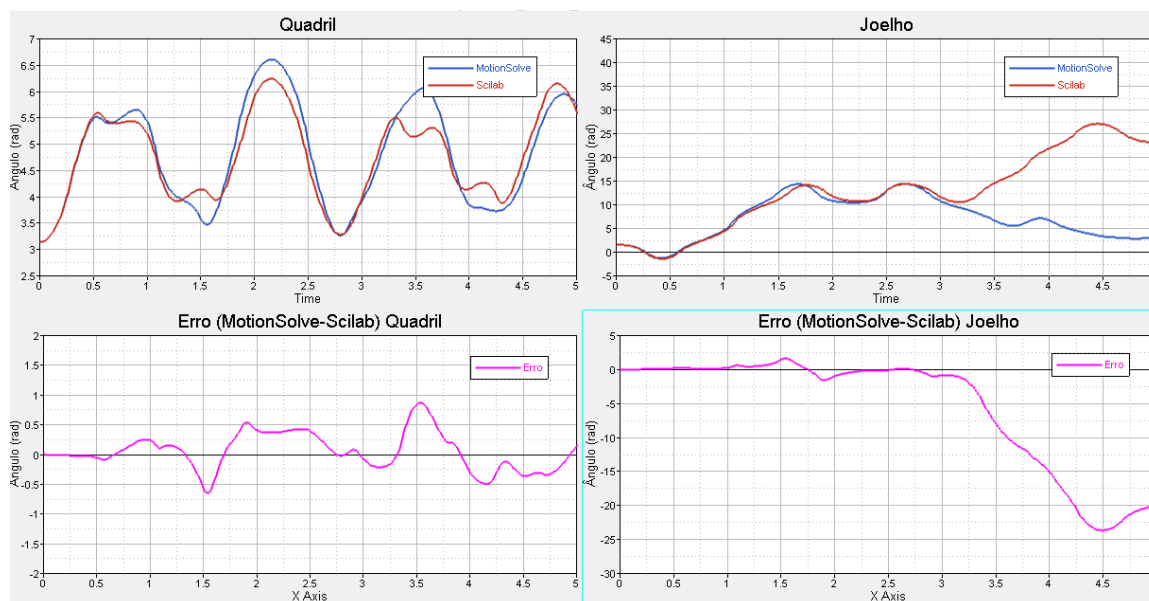


Figura 5-14 - Comparação da solução por integração do sistema em espaço de estado e do MotionSolve – grandes deslocamentos

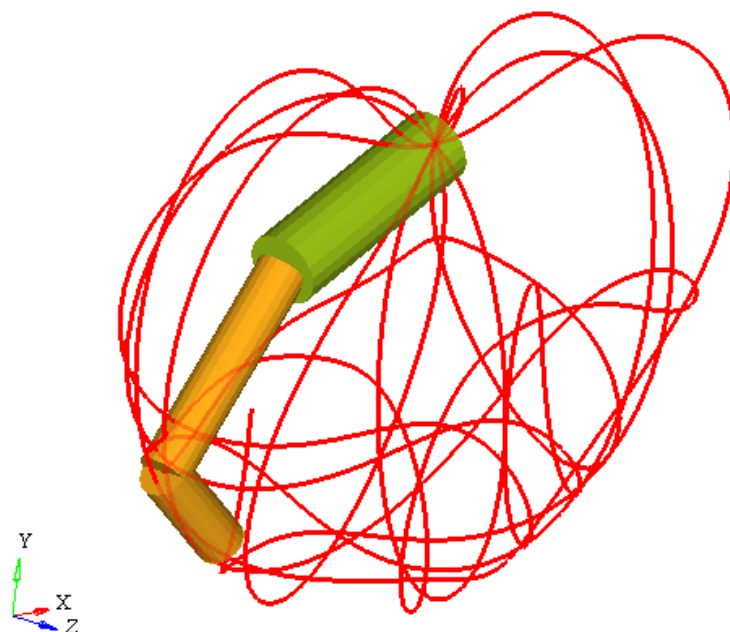
Até aproximadamente 3,5s os dois métodos apresentam respostas bastante próximas.

Como o sistema um comportamento que podemos considerar como caótico a resposta é bastante sensível à integração numérica aplicada o que pode causar um

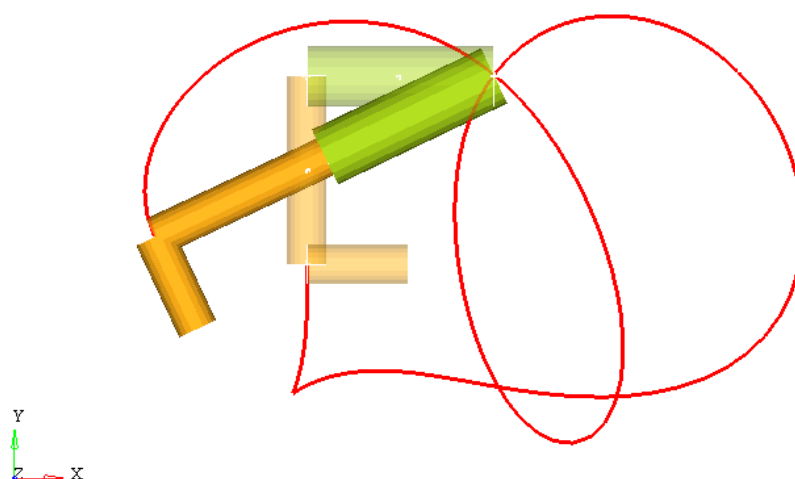


distanciamento dos gráficos a partir de certo ponto e eles passam a não mais se aproximar.

A imagem a seguir ilustra o movimento de um ponto situado na extremidade do pêndulo.



**Figura 5-15 – Traçado da ponta do pêndulo até 5s – Vista 3D**



**Figura 5-16 – Traçado da ponta do pêndulo até 1.5s – Vista 2D**

Nota-se uma boa aproximação dos dois resultados por este traçado.

## 5.4 FREQUÊNCIAS NATURAIS DE COMPONENTES

Os componentes (ou corpos ou partes) do pêndulo foram, até aqui, modeladas como rígidas. Esta é uma primeira abordagem que nos ajuda a entender características do sistema como a frequência natural do sistema e evolução quando submetido a grandes deslocamentos.

O modelamento por corpo rígido é, na verdade, uma idealização uma vez que os corpos têm rigidez característica da estrutura.

Esta rigidez influencia em maior ou menor grau na dinâmica do sistema e é por esta razão que será feito um estudo da flexibilidade bem como a determinação das frequências naturais de uma parte específica, no caso a coxa.

Para efeitos de simplificação do problema, uma vez que o trabalho busca entender como o modelamento numérico dos sistemas de múltiplos corpos (pêndulo duplo, em específico), será considerada apenas a rigidez no sentido axial, se comportando o corpo como um elemento de treliça (ou ROD). Estamos, portanto, desconsiderando o efeito de flexão. Também será considerado o regime de linearidade de material (deslocamento proporcional ao carregamento  $F=k.x$ ).

Análises mais refinadas como a consideração da flexibilidade, não linearidade geométrica e de material são possíveis, porém fogem do escopo deste trabalho. Vale salientar que a análise da forma como será feita pode servir de base para estudos posteriores.

### 5.4.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS – FORMA ANALÍTICA

A título de comparação e validação do modelo, as frequências naturais longitudinais de uma viga na condição livre-livre para um corpo contínuo são dadas por:

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{E}{\rho L^2} \left( \sqrt{\frac{N / m^2}{kg / m^3 * m^2}} \right)}$$

Com  $n=0, 1, 2, 3...$

Consideremos os valores aproximados para a propriedade do osso:

$$E = 7 \text{ GPa}$$

$$\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 0,4629 \text{ m}$$

Portanto, de forma analítica temos, lembrando que  $\omega_n = 2\pi f$ :

$$f_1 = 0 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 1010,4 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 2020,8 \text{ Hz}$$

### 5.2.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS – FORMA DISCRETIZADA EM ELEMENTOS FINITOS

As equações para análise de sistemas contínuos são adequadas para aplicações em que as seções transversais têm propriedades aproximadamente constantes. No entanto, se as propriedades geométricas e de materiais mudarem ao longo do componente (por exemplo em partes complexas como uma perna) então uma modelagem mais apropriada para representar de forma viável computacionalmente a solução é necessária para descrever essas descontinuidades.

A modelagem em elementos finitos é uma forma de descrever estas descontinuidades de propriedades.

Este modelo representa sistemas contínuos de forma discretizada em elementos menores.

Abaixo estão alguns exemplos de órgãos de estruturas complexas do corpo humano representados em elementos finitos.

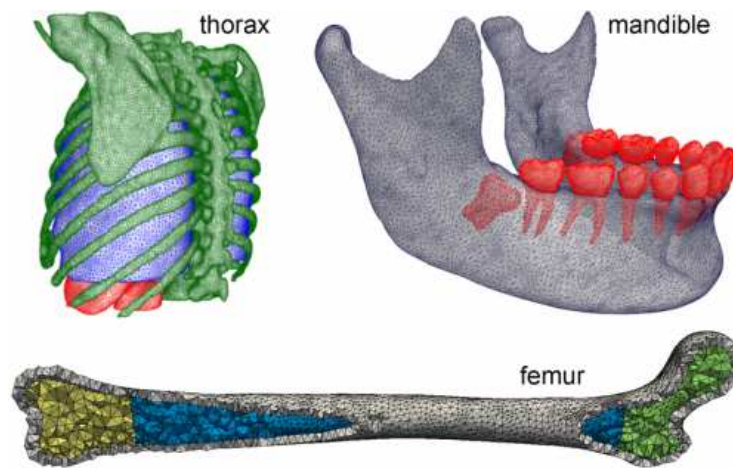


Figura 5-17 - Exemplos de estruturas ósseas em elementos finitos

Vamos representar uma das partes do pendulo como uma viga com elemento de treliça (carregamento somente axial) dividida em 2 elementos.

Consideremos que a viga pode sobre apenas vibrações longitudinais. Se desejarmos modelar a viga com elementos discretos, podemos escolher os valores de massa e rigidez dispostos na forma matricial para cada elemento conforme abaixo.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \text{(b)} \\
 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{u_1} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \xrightarrow{u_2} \end{array} \\
 \text{---} & \text{---} \\
 & \begin{array}{l} E_e, \rho_e, A_e, L_e \\ \{f_1\} = [K_e] \{u_1\} \\ \{f_2\} = [M_e] \{\ddot{u}_1\} \end{array}
 \end{array}$$

Temos então que a matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_e & -K_e \\ -K_e & K_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Onde

$$K_e = \frac{A_e E_e}{L_e}$$

E a matriz de massa é dada por:

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

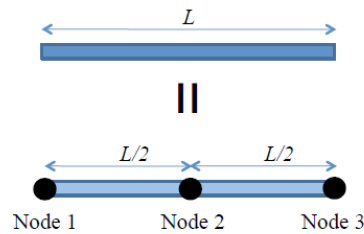
Com

$$M_{11} = M_{22} = \frac{\rho_e L_e}{3} \text{ and } M_{12} = M_{21} = \frac{\rho_e L_e}{6}$$

Sendo  $\rho_e$  a densidade linear da viga.

Para um corpo de comprimento  $L$ , seção transversal  $A$ , módulo de elasticidade  $E$  e densidade volumétrica  $\rho$ , podemos calcular rigidez e massa concentrada como mostrado anteriormente para cada elemento.

Vamos agora usar 2 elementos para representar a viga.



Matriz de rigidez para cada elemento:

$$[K_e] = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_e] = \rho AL/2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Devemos combinar as matrizes de rigidez e massa elemental em matrizes que representem o corpo globalmente impondo vínculos a cada um dos nós do modelo:

$$\begin{aligned} \rightarrow f_{node\#2,element\#1} &= -f_{node\#1,element\#2} \\ \rightarrow u_{node\#2,element\#1} &= u_{node\#1,element\#2} \end{aligned}$$

As matrizes de rigidez e massa dos dois elementos são indicadas abaixo:

$$\begin{array}{cc}
 \text{N1} & \text{N2} \\
 \xrightarrow{\text{red}} [K_1] = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{N1} \\ \text{N2} \end{matrix} & \xrightarrow{\text{red}} [K_2] = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{N1} \\ \text{N2} \end{matrix} \\
 \begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \end{Bmatrix} = [K_2] \begin{Bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

E os vínculos entre elementos são dados por:

$$f_{2,1} = -f_{1,2} \text{ and } u_{2,1} = u_{1,2}$$

Para assegurar as restrições de devemos somar as linhas correspondentes a cada nó para eliminar a força interna do nó.

$$\begin{array}{c}
 \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \boxed{1+1} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\
 \{f\} = [K] \{u\}
 \end{array}$$

E1  
E2

E a matrizes de massa e inércia resultantes são dadas por:

$$[K] = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{red}} [M] = \rho AL/2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Podemos agora equacionar o movimento do sistema por:

$$\rho AL/2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{red}} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Para determinação das frequências naturais da viga, passamos a ter um problema de autovalores e autovetores.

O sistema fica então representado por:

$$\begin{pmatrix} 0.6130 & -0.6130 & 0 \\ -0.6130 & 1.2260 & -0.6130 \\ 0 & -0.6130 & 0.6130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2510 & 0.6255 & 0 \\ 0.6255 & 2.5019 & 0.6255 \\ 0 & 0.6255 & 1.2510 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

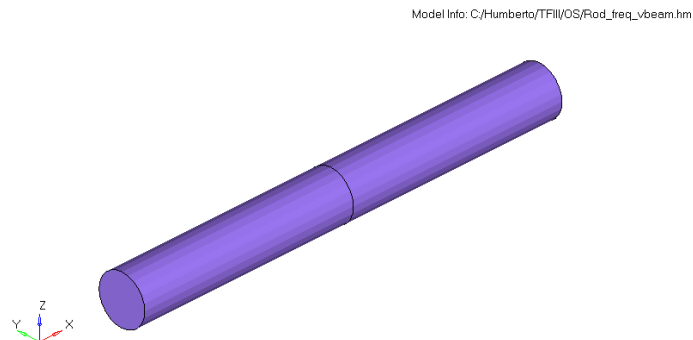
Os valores de frequência calculados usando 2 elementos foram calculadas e são mostrados abaixo:

$$f_1 = 0 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 1114,1 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 2228,2 \text{ Hz}$$

Para validar o modelo desenvolvido acima foi um mesmo modelo usando um software comercial de elementos finitos.



**Figura 5-18 - Modelamento da coxa em elementos finitos**

Os resultados são apresentados abaixo:

**Tabela 5-4 - Frequências naturais calculadas com o solver de elementos finitos OptiStruct**

Mode	Frequency
1	3.987660E-04
2	1.172043E+03
3	2.342434E+03

A tabela abaixo sintetiza as frequências encontradas para os diferentes métodos:

Tabela 5-5 - Comparação das frequências naturais do componente

Método	1ª Freq (Hz)	Erro relativo f1 (%)	2ª Freq (Hz)	Erro relativo f2 (%)	3ª Freq (Hz)	Erro relativo f3 (%)
Analítico	0,0	-	1010,4	-	2020,8	-
Modelo 2 elementos	0,0	0,0	1114,1	10,3	2228,2	10,3
Modelo Elementos finitos – Solver OptiStruct	0,0	0,0	1172,0	16,0	2342,4	15,9

Pode-se notar que a solução desenvolvida no trabalho ficou mais próxima da analítica do que a solução do software OptiStruct e o erro foi da ordem de 10%.

Vale destacar que o modelo desenvolvido para 2 elementos pode ser facilmente extrapolado para mais elementos e a precisão será ainda maior. As duas soluções serão idealmente iguais para um número infinito de elementos (equivalente ao meio contínuo).

Para saber o número de elementos requeridos para a solução é preciso fazer um estudo de convergência, variando o número de elementos e avaliando o erro.

## 6 MODELAMENTO E SOLUÇÃO EM AMBIENTE MOTIONSOLVE

### CONSIDERANDO A FLEXIBILIDADE DE UM COMPONENTE

Fizemos até aqui duas abordagens para estudo do pendulo duplo. A primeira esteve focada na dinâmica do sistema e a segunda, na dinâmica do componente.

Podemos relacionar as duas soluções considerando a dinâmica do componente e do sistema simultaneamente. Isto é feito considerando o mecanismo com partes flexíveis.

No modelo do sistema existem poucos graus de liberdade, geralmente um número menor que 100 e o modelo do componente em elementos finitos normalmente chega a ter milhões de graus de liberdade.

Portanto, as soluções matemáticas empregadas também são distintas. Por exemplo, Runge Kutta para sistema e inversão de matrizes e autovalores em elementos finitos.

Existem métodos que integram essas duas abordagens. Um método comumente usado é a síntese de Craig-Bampton que reduz o número de graus de liberdade de um



componente discretizado em elementos a valores tipicamente da ordem de 10 a 100. Isto permite fazer junção do modelo em elementos finitos no modelo do sistema.

Foge do escopo deste trabalho detalhar numericamente o método de Craig-Bampton uma vez que se trata de algoritmos trabalhosos de inversão de matrizes, ortogonalização e também transformação das variáveis do sistema.

De uma forma geral, podemos pensar no método de Craig-Bampton como semelhante à transformada de Fourier em que as funções podem ser reescritas como combinação de uma base de funções na forma de senos.

Na síntese de Craig Bampton, a base são as condições deformadas (ou os autovetores) ou modos de vibrar do componente e qualquer outra condição deformada pode ser uma combinação desta base.

Portanto na solução do sistema, devemos encontrar os fatores que multiplicam esta base.

Um detalhamento do método está presente no apêndice – flexibilidade estrutural em análises dinâmicas – método de Craig Bampton.

O uso desta solução pode ser ilustrado abaixo onde foi construído um modelo com uso de um componente flexível.

A coxa foi modelada em elementos finitos com 2 elementos 1D de viga, tendo as mesmas características de material consideradas no cálculo das frequências naturais da coxa, sendo:

$$E = 7 \text{ GPa}$$

$$\text{Rho} = 8000 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 0,4629 \text{ m}$$

$$D=2''$$

O componente foi modelada no programa de elementos finitos HyperMesh em elementos de treliça (ROD).

A síntese modal foi feita no solver OptiStruct, utilizando o método de Craig-Bampton.

Vamos começar validando o modelo na posição vertical, em equilíbrio, conforme mostrado na figura abaixo:

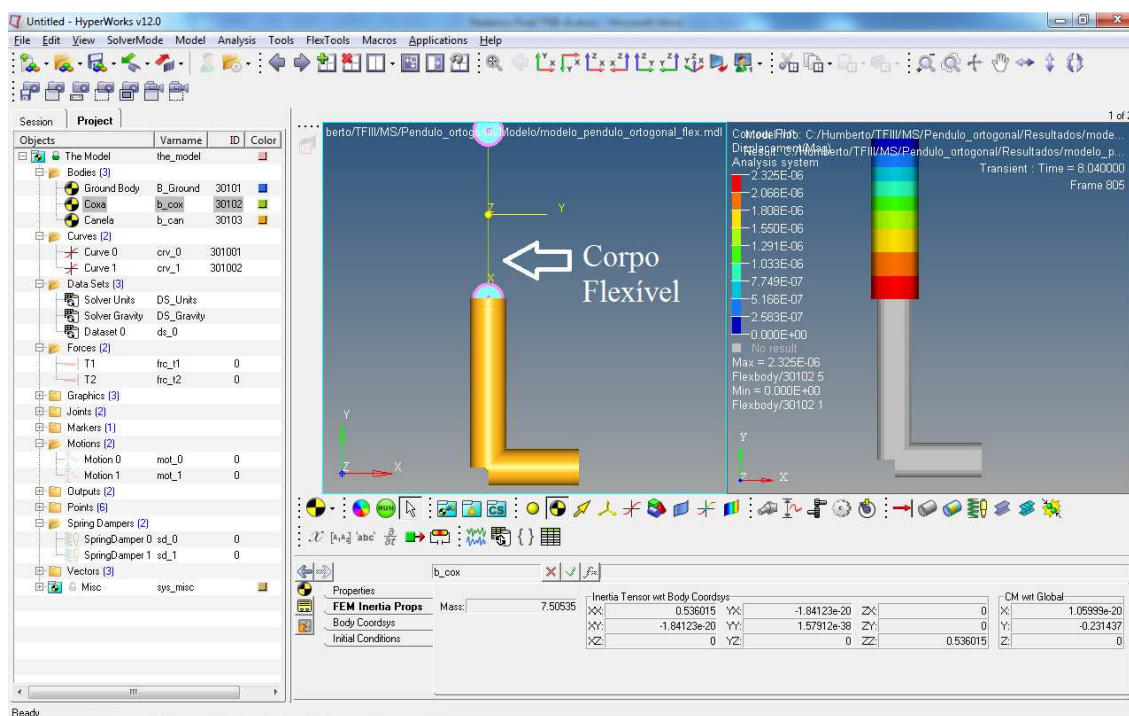


Figura 6-1 - Modelo pêndulo duplo com corpo flexível – posição vertical

O corpo flexível foi modelado com 2 elementos e a massa fica distribuída entre os nós conforme mostrado a seguir.

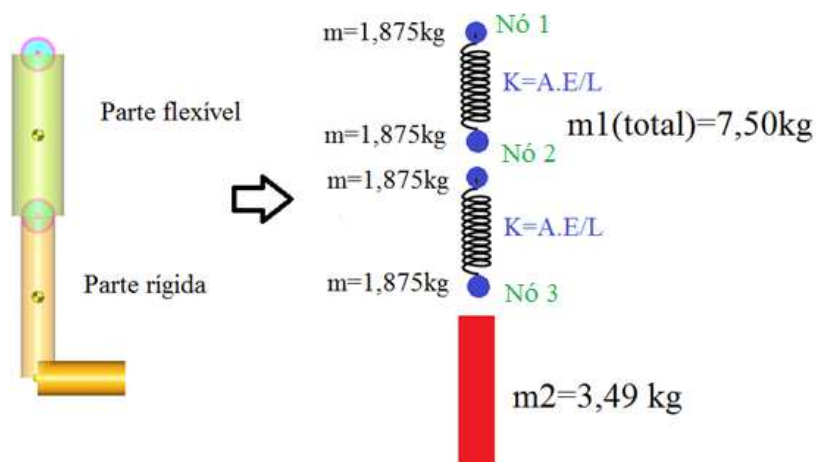


Figura 6-2 – Esquema do modelo flexível com 2 elementos

$$K = \frac{A \cdot E}{L} = \frac{\pi \cdot (2,25,4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 7 \cdot 10^9}{0,4929/2} = 5,76 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

A força na primeira mola será  $F1 = 91,15\text{N}$  e a força na segunda mola será  $F2=53,65\text{N}$

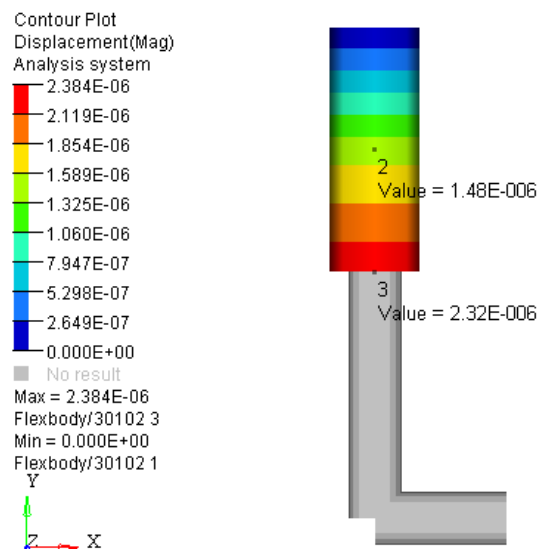
O deslocamento no nó intermediário, N2, será:

$$\Delta N2 = \frac{F1}{K} = 1,58 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

O deslocamento do nó extremo N3 será:

$$\Delta N3 = \Delta N2 + \frac{F2}{K} = 2,51 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

A solução encontrada pelo solver MotionSolve foi:



**Figura 6-3 - Deslocamentos da parte flexível - posição vertical**

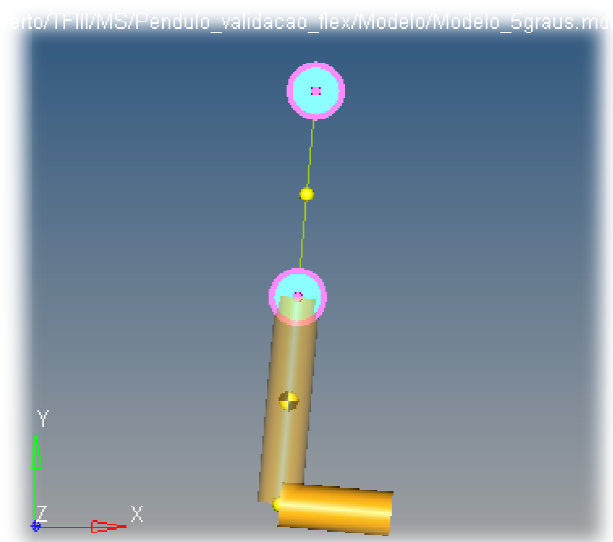
Comparando os dois resultados, temos:

**Tabela 6 - Comparação entre deslocamentos calculado e MotionSolve**

Nó	Deslocamento calculado (x10e-6 m)	Deslocamento MotionSolve (x10e-6 m)	Erro (%)
2	1,58	1,48	6,3
3	2,51	2,32	7,6

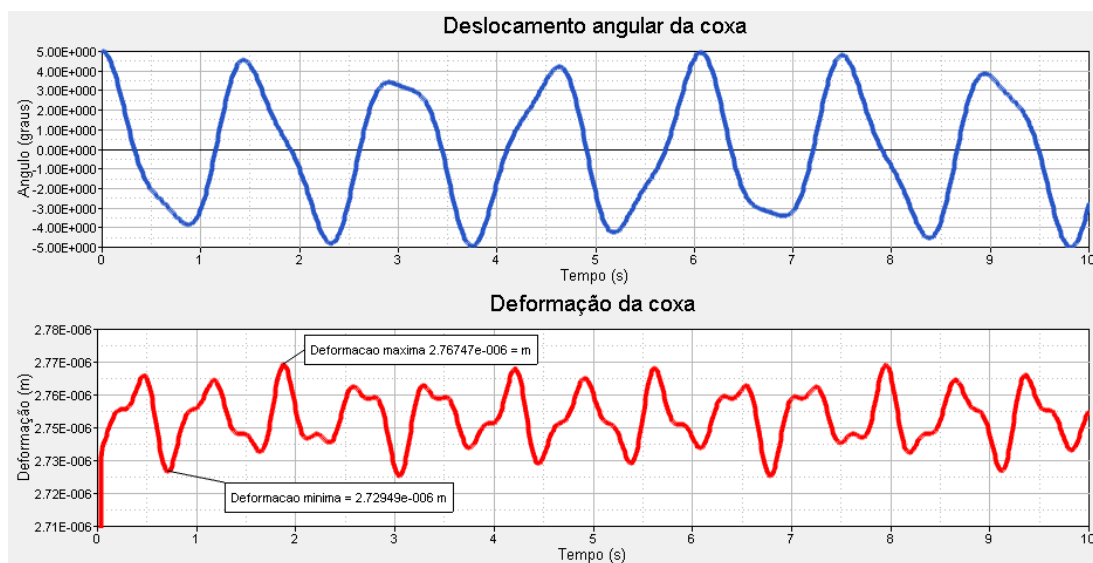
Vamos agora analisar os deslocamentos em uma condição dinâmica. Primeiro com o pêndulo oscilando com pequenos deslocamentos e em outra análise com grandes deslocamentos.

Abaixo temos o pêndulo flexível com posição inicial a 5 graus com a vertical.



**Figura 6-4 - Pêndulo flexível a 5°**

A seguir temos a resposta do sistema para a condição inicial de 5 graus e oscilação livre.

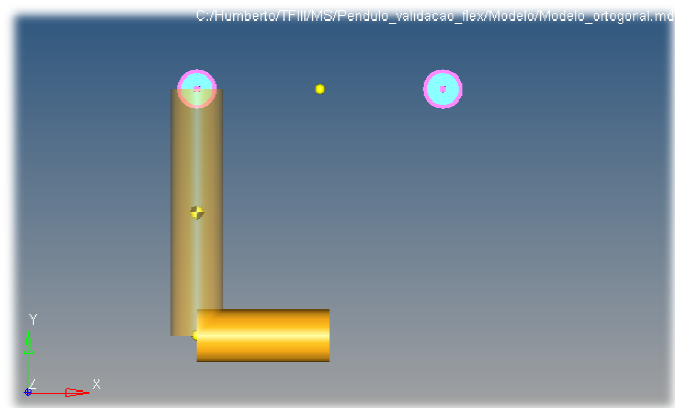


**Figura 6-5 - Respostas do pêndulo flexível em oscilação livre. Posição inicial 5°**

Podemos notar que as maiores deformações ocorrem nos pontos de elevadas acelerações centrípetas, ou seja, quando a coxa está próxima da vertical.

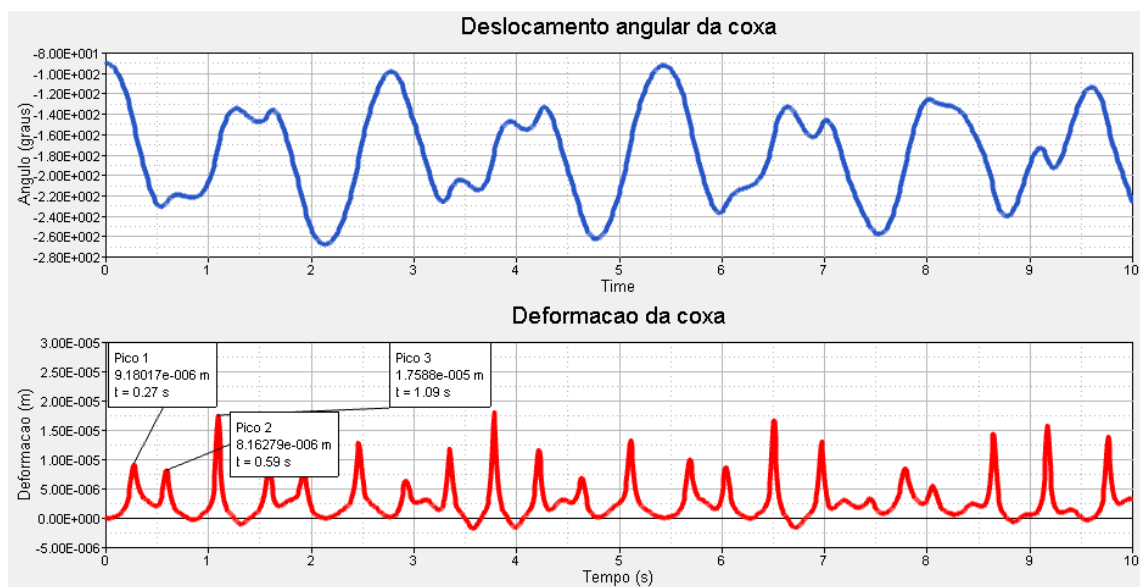
Os valores de deformação oscilam entre  $2,729\text{e-}6$  m e  $2,767\text{e-}6$  m.

Vamos agora simular o pêndulo em uma condição longe da linearidade com os pêndulos a 90 graus na condição inicial e oscilação livre, conforme ilustração abaixo.



**Figura 6-6 - Pêndulo flexível ortogonal – condição inicial**

As repostas encontradas para o deslocamento angular da coxa e sua deformação foram:



**Figura 6-7 - Respostas pêndulo flexível ortogonal**

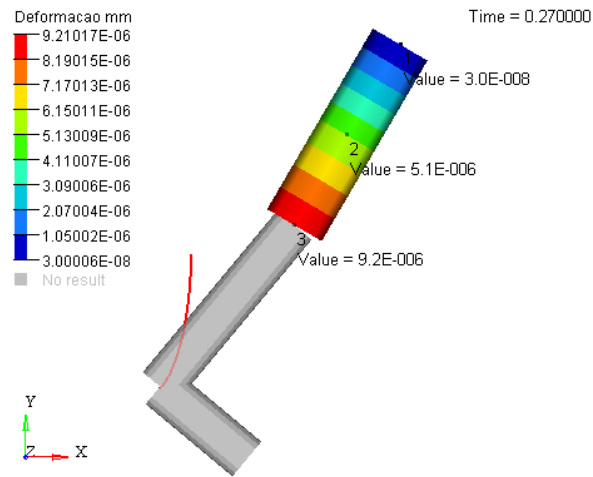


Figura 6-8 - Deformações no instante do pico 1 (t=0,27s)

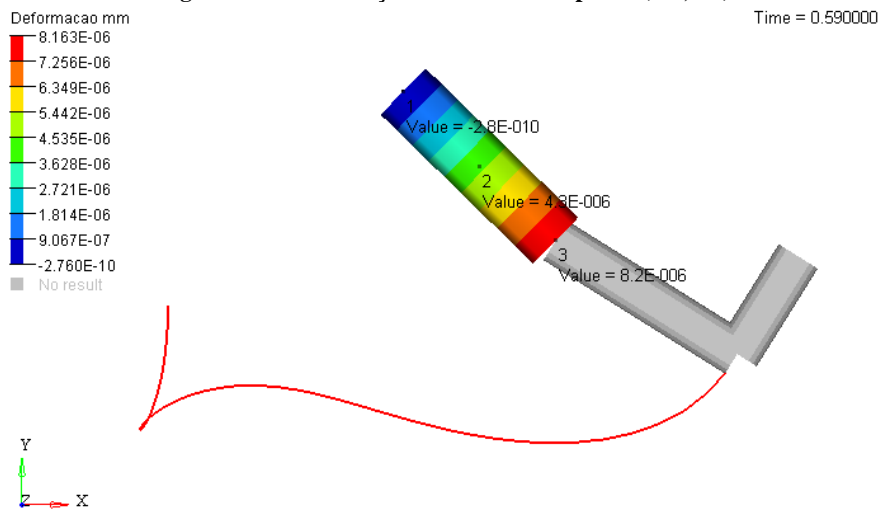


Figura 6-9 - Deformações no instante do pico 2 (t=0,59s)

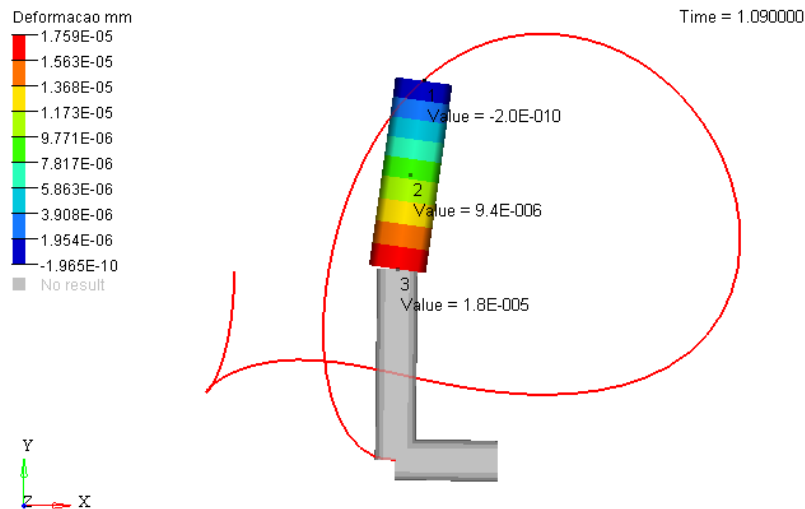


Figura 6-10 - Deformações no instante do pico 3 (t=1,09s)

Os resultados das deformações se mostraram condizentes com o que era esperado com os picos de deformação acontecendo nos instantes de mudança brusca da trajetória.

A deformação máxima ficou em  $1,75 \times 10^{-5}$  m, ou seja,  $17,5 \mu\text{m}$  o que demonstra que para este cenário a flexibilidade é muito baixa e tem pouca influência na dinâmica do sistema.

## 7 CONCLUSÕES

O problema de mecanismo de pêndulo duplo abordado neste trabalho se mostrou adequado para compreender a forma com que é possível analisar problemas de dinâmica multicorpos.

Primeiramente foi apresentado um problema real de uma perna com duas articulações que pode ser representada por um modelo de pêndulo duplo. A dinâmica do pêndulo foi então descrita na forma de espaço de estado. Para validar o modelo matemático foi feito um estudo das frequências naturais do sistema comparando com valores analíticos e também com modelos desenvolvidos em ferramenta específica para dinâmica de múltiplos corpos (solver MotionSolve) e os valores encontrados ficaram muito próximos, com erro menor que 1%.

Outra comparação foi feita com o pêndulo em uma posição ortogonal sobre a ação da gravidade, posição em que a dinâmica se apresenta altamente não linear. O resultado de deslocamentos angulares por integração numérica do modelo em espaço de estado com método Kunge Kutta foi comparado à solução do MotionSolve e os valores ficaram muito próximos até 3,5s. Após esse tempo, as soluções passaram a divergir. Como o resultado tem, em certa medida, de perfil caótico, qualquer pequena variação na solução numérica pode alterar o comportamento do sistema e então as soluções podem divergir bastante a partir daquele ponto. Vale ressaltar que o modelo e integração deste trabalho foram feitos de forma a ter um controle de todos os passos (modelo e integração) o que não acontece com a solução do MotionSolve que, grosso modo, pode ser visto como uma “caixa preta”.

Foi realizado também um estudo com foco no entendimento na dinâmica do componente, de sua rigidez longitudinal, distribuição de massa e frequências naturais através da discretização em duas partes (ou elementos). Os valores encontrados foram então comparados a uma solução comercial de elementos finitos (OptiStruct) e também a solução analítica que ficaram com erro da ordem de 5%.

Integrando as duas abordagens, dinâmica do sistema e do componente, foi feito com estudo do pêndulo com um componente em corpo flexível, por síntese de Craig Brampton usando as soluções OptiStruct e MotionSolve. Neste caso não foi desenvolvido o detalhamento matemático da solução. As deformações do componente flexível ficaram muito baixas, e podemos, portanto concluir que para o cenário deste trabalho, a dinâmica do componente não altera a dinâmica do sistema por envolver baixos carregamentos e frequências distintas.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos no sentido de detalhar numericamente a solução com corpo flexível. Também poderá servir de base para trabalhos mais completos sobre a locomoção humana.



## 8 REFERÊNCIAS

- [1]. **CARVALHO**, CELSO FERNANDES DE. *Uma análise dos métodos de Subestruturação Dinâmica* (Rio de Janeiro) 1989.
- [2]. **VILELLA**, PAULO ALVAREZ. *Efeito da Frequência de Excitação na Resposta Dinâmica de Sistemas Modelados através de Superelementos* [Rio de Janeiro] 1996
- [3]. **Kraker**, Bram de. *Generalization of the Craig-Bampton CMS procedure for general damping* (Technische Universiteit Eindhoven) 1993
- [4]. **Sellgren**, *COMPONENT MODE SYNTHESIS - A method for efficient dynamic simulation of complex technical systems* (Department of Machine Design) 2003
- [5]. **Brown**, Jason C e Robertson, John A. *Motor Vehicle Structure*. s.l. : Elsevier, 2001. p. 304.
- [6]. **Vargas**, Vinícius Athaydes de. *EFEITOS DA FLEXIBILIDADE ESTRUTURAL EM SIMULAÇÕES DE DINÂMICA LATERAL DE VEÍCULO DE TRANSPORTE DE CARGA* (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) 2011
- [7]. **Barboza**, Tiudorico Leite. *O Uso de Superelementos para Análise de Problemas com Origem na Integração Dinâmica entre o Casco e o Eixo Propulsor*. – (Rio de Janeiro) UFRJ/COPPE, 2009.
- [8]. **Javier Garcia de Jal, Eduardo Bayo**. *KINEMATIC AND DYNAMIC SIMULATION OF MULTIBODY SYSTEMS-The Real-Time Challeng*. Department of Applied Mechanics
- [9]. **Peet , Matthew M**. *Spacecraft and Aircraft Dynamics*. Illinois Institute of Technology. 2012
- [10]. **Knudson , Benjamin J**. *The Double Pendulum: Construction and Exploration*. Cal Poly State University San Luis Obispo 2012
- [11] **S Rao. Gunakala**. *A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB*. International Journal of Applied Science and Technology. 2012

## 9 APÊNDICES

### 9.1 FLEXIBILIDADE ESTRUTURAL EM ANÁLISES DINÂMICAS – MÉTODO DE CRAIG BAMPTON

#### 9.1.1.1 Superposição Modal

A chave para a determinação da resposta dinâmica de um sistema discretizado em elementos finitos, através da sua flexibilidade de modos, baseia-se no método da superposição modal. É assumido que, para uma estrutura sujeita a um carregamento dinâmico, a sua configuração deformada em um dado instante de tempo pode ser obtida somando-se as configurações de diferentes modos de vibrar. Como demonstra a Figura 9-1, essa soma de configurações é uma combinação linear dos modos naturais de vibração da estrutura. Nessa soma de efeitos, cada modo de vibração é multiplicado por um fator que representa a sua importância ao cálculo da resposta dinâmica naquele instante de tempo. Tal fator é conhecido como fator de escala ou amplitude modal.

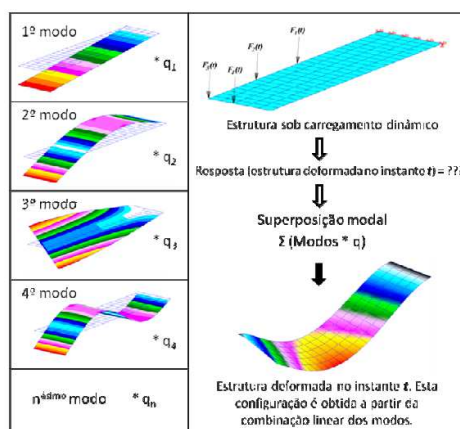


Figura 9-1 - Superposição modal

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) \quad (9-1)$$

Onde  $n$  é o número de modos de vibrar e  $q_i$  são as coordenadas modais, também chamadas de fatores de escala ou amplitudes modais.

Portanto, a superposição modal, definida pela Equação (9-1), que representa a resposta transiente da estrutura, depende da execução de duas etapas. A primeira é o cálculo dos modos ( $\phi_i$ ) e frequências naturais de vibração da estrutura, em procedimento conhecido por análise modal. A segunda é a determinação do fator de

participação (amplitude) de cada um desses modos ( $q_i$ ) na resposta dinâmica do instante  $t$ .

### 9.1.1.2 Análise Modal

A resposta dinâmica linear do sistema, para cada grau de liberdade, é regida pelo cálculo da equação de equilíbrio,  $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \sum F_{ext}$

Todavia, para sistemas discretizados em elementos finitos, com uma quantidade muito grande de GDL (graus de liberdade), a largura de banda das matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  torna bastante oneroso o processo computacional de solução dessas equações de equilíbrio.

A alternativa para esse problema é uma mudança da base de deslocamentos do modelo de elementos finitos para uma base reduzida de deslocamentos generalizados. O objetivo dessa troca é a obtenção de novas matrizes de massa,  $[\tilde{M}]$ , amortecimento  $[\tilde{C}]$  e rigidez  $[\tilde{K}]$  para o sistema, as quais têm largura de banda menor que as matrizes do sistema original. Para realizar essa mudança de base, uma matriz de transformação é necessária. As colunas dessa matriz de transformação  $[\varphi]$ , são os autovetores, que são o resultado da análise modal.

Matematicamente, o procedimento de análise modal consiste, resumidamente, em:

- Montagem do sistema  $K - \lambda[M]$ ;
- Cálculo dos autovalores do sistema  $\{\lambda_i\}$ ;
- Determinação das frequências naturais,  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$
- Cálculo dos autovetores  $\{\varphi_i\}$ .

De posse da matriz  $[\varphi]$ , realiza-se a transformação das coordenadas da equação de equilíbrio, para se obter as equações dinâmicas dos deslocamentos generalizados modais. Essa transformação é dada pela Equação 9.2.

$$\{x(t)\} = [\varphi]\{\tilde{x}(t)\} \quad (9-2)$$

As novas equações dinâmicas, agora na base de deslocamentos generalizados, são resumidas na 9.3.

(9.3)

$$\{\ddot{\hat{x}}(t)\} + [\varphi]^T [C] [\varphi] \{\dot{\hat{x}}(t)\} + [\omega]^2 \{\hat{x}(t)\} = [\varphi]^T \sum F_{ext}$$

onde  $[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ ,  $[\omega]^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$ ,  $[\varphi]^T [K] [\varphi] = [\omega]^2$  e  $[\varphi]^T [M] [\varphi] = [I]$ .

A matriz  $[\varphi]$  tem em suas colunas os autovetores  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ , que são os modos de vibração do sistema. A matriz diagonal  $[\omega]^2$  tem como elementos não nulos  $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$ , que são os quadrados das frequências naturais do sistema, determinadas a partir dos autovalores.

Do ponto de vista físico, a análise modal reflete o comportamento dinâmico básico da estrutura e indica como responderá a um carregamento transiente agindo sobre ela. Também é importante ressaltar que, quando é realizada a análise modal de uma estrutura livre (sem vinculações), os primeiros modos de vibrar não acarretam deformação na mesma. São os modos de autovalor ou frequência natural nula, nos quais não há transformação de energia cinética em potencial elástica (deformação). Tais modos são chamados de modos de corpo rígido.

### 9.1.1.3 Amplitude Modal (Fator de Escala)

Para determinar o peso de cada modo de vibração na resposta dinâmica do sistema, substitui-se a equação de superposição modal (Equação 9.1) na equação de equilíbrio dinâmico. Essa substituição é demonstrada pela Equação 9.4.

$$\begin{aligned} & [M] \ddot{q}_1 \{\varphi_1\} + [M] \ddot{q}_2 \{\varphi_2\} + \dots + [M] \ddot{q}_n \{\varphi_n\} + [C] \dot{q}_1 \{\varphi_1\} + [C] \dot{q}_2 \{\varphi_2\} + \dots \\ & + [C] \dot{q}_n \{\varphi_n\} + [K] q_1 \{\varphi_1\} + [K] q_2 \{\varphi_2\} + \dots + [K] q_n \{\varphi_n\} = \{F(t)\} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Através da propriedade de ortogonalidade, é possível simplificar essa equação, como indica a Equação 9.5.

$$\{\varphi_i\}^T [M] \ddot{q}_i \{\varphi_i\} + \{\varphi_i\}^T [C] \dot{q}_i \{\varphi_i\} + \{\varphi_i\}^T [K] q_i \{\varphi_i\} = \{\varphi_i\}^T \{F(t)\} \quad (9.5)$$

Aplicando-se novamente o conceito da mudança de base real para uma base generalizada, ou desacoplada, originam-se matrizes de massa, amortecimento, rigidez e força generalizadas para um dado modo de vibrar,  $\varphi_i$ . A definição das matrizes desacopladas é dada na Equação 3.6.

$$\begin{aligned}\left[\tilde{M}\right]_i &= \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} \\ \left[\tilde{C}\right]_i &= \{\varphi_i\}^T [C] \{\varphi_i\} \\ \left[\tilde{K}\right]_i &= \{\varphi_i\}^T [K] \{\varphi_i\} \\ \left\{\tilde{F}(t)\right\}_i &= \{\varphi_i\}^T \{F(t)\}\end{aligned}\quad (9.6)$$

Assim, a Equação 9.5 tem sua versão desacoplada dada pela Equação 9.7.

$$\left[\tilde{M}\right]_i \ddot{q}_i(t) + \left[\tilde{C}\right]_i \dot{q}_i(t) + \left[\tilde{K}\right]_i q_i(t) = \left\{\tilde{F}(t)\right\}_i \quad (9.7)$$

O fator de participação de cada modo,  $q_i$ , portanto, é determinado resolvendo-se uma equação escalar para cada modo de vibrar  $i$  (Equação 9.7). Isto é, basta resolver um sistema de um GDL em coordenadas generalizadas. A ideia principal aqui é a mudança da base física da estrutura para uma base desacoplada, onde as soluções das equações são mais facilmente encontradas.

Finalmente, com a determinação dos modos naturais de vibração  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$  e de seus respectivos fatores de participação  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , é encontrada a resposta dinâmica da estrutura para cada instante de tempo  $t$ , a partir da superposição modal. Essa resposta transiente é dada pela Equação 3.8, a qual é análoga à equação inicial.

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i(t) = q_1 \{\varphi_1\} + q_2 \{\varphi_2\} + q_3 \{\varphi_3\} + \dots + q_n \{\varphi_n\} \quad (9.8)$$

Onde  $\{x(t)\}$  é a resposta da estrutura no instante  $t$ ;  $q_i$  a  $q_n$  são os fatores de participação de cada modo; e  $\{\varphi_1\}$  a  $\{\varphi_n\}$  são os modos de vibração, calculados na análise modal.

#### 9.1.1.4 Flexibilidade Modal em Sistemas Multicorpos

O método de elementos finitos discretiza uma estrutura real, com infinitos graus de liberdade, em um modelo composto por um grande número de elementos, nós e GDL. Os deslocamentos lineares de cada um desses nós,  $x$ , são descritos de forma aproximada por combinação linear (superposição) de modos de vibrar como já demonstrado pelas Equações 9.1 e 9.8.

Conforme a premissa básica da superposição modal, é possível descrever o comportamento de inúmeros GDL nodais com um pequeno número de GDL modais, os quais mais influenciam o comportamento do sistema na faixa de frequência de interesse.

Para que as máximas deformações relevantes ao sistema possam ser representadas com o menor número de coordenadas modais, é empregada uma técnica de síntese modal de componentes. Trata-se do método de Craig-Bampton, que permite a definição de subconjuntos de GDL (da análise modal) que não estarão sujeitos à superposição modal. São os chamados GDL de contorno, ou interface, os quais são preservados na base modal de C-B.

Portanto, o método divide os GDL do sistema em dois grupos: os GDL de contorno,

$\{xb\}$ , e os GDL de interior,  $\{xi\}$ . Definem-se, assim, dois conjuntos de modos de vibrar: os modos vinculares e os modos normais de base fixa. Os modos vinculares são formas estáticas obtidas pela aplicação de deslocamento unitário (translacional ou rotacional) em cada GDL de contorno, enquanto todos os demais GDL de contorno são mantidos fixos. O resultado é que as coordenadas modais dos modos vinculares são iguais aos deslocamentos dos GDL de contorno ( $\{qc\} = \{xb\}$ ).

Os modos normais de base fixa são obtidos ao se restringir os GDL de contorno e calcular uma solução de autovalores e autovetores. São esses modos que definem a expansão modal dos GDL de interior, a qual tem qualidade proporcional ao número de modos retidos pelo usuário.

A Equação 9.9 descreve a relação entre os GDL físicos ( $\{x\}$ ) e os modos de Craig-Bampton com as suas coordenadas modais.

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_i\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_{ic}] & [\Phi_{in}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_c\} \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

Onde:

$\{x_b\}$  - GDL de contorno

$\{x_i\}$  - GDL de interior

$\{q_c\}$  - Coordenadas modais dos modos vinculares

$\{q_n\}$  - Coordenadas modais dos modos normais de base fixa

$[I]$  - Matriz identidade

$[0]$  - Matriz zero

$[\Phi_{ic}]$  - Deslocamentos físicos dos GDL de interior nos modos vinculares

$[\Phi_{in}]$  - Deslocamentos físicos dos GDL de interior nos modos normais

As matrizes generalizadas de massa e rigidez, correspondentes à base modal de Craig-Bampton, são obtidas via transformação modal. Para a rigidez, tal transformação é ilustrada pela Equação 9.10.

$$\begin{aligned} [\tilde{K}]_{C-B} &= [\varphi]^T [K] [\varphi] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_{ic}] & [\Phi_{in}] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bi}] \\ [K_{ib}] & [K_{ii}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_{ic}] & [\Phi_{in}] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{cc}] & [0] \\ [0] & [\tilde{K}_{nn}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Para a massa, a transformação modal é dada pela Equação 9.11.

$$\begin{aligned} [\tilde{M}]_{C-B} &= [\varphi]^T [M] [\varphi] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_{ic}] & [\Phi_{in}] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [M_{bb}] & [M_{bi}] \\ [M_{ib}] & [M_{ii}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_{ic}] & [\Phi_{in}] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [\tilde{M}_{cc}] & [\tilde{M}_{cn}] \\ [\tilde{M}_{cn}] & [\tilde{M}_{nn}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Onde os índices  $i$  e  $b$  denotam os GDL de interior e de contorno, respectivamente;  $c$  e  $n$  os modos vinculares e normais, respectivamente; e  $[\tilde{K}]_{C-B}$  e  $[\tilde{M}]_{C-B}$  são as matrizes generalizadas de massa e rigidez de C-B, respectivamente.

Como  $[\tilde{K}]_{C-B}$  e  $[\tilde{M}]_{C-B}$  não são matrizes diagonais, os modos ‘puros’ de Craig-Bampton não são ortogonais. Para transformar a base modal de C-B em uma base equivalente e ortogonal de coordenadas modais,  $[q^*]$  é necessária uma matriz de transformação,  $[N]$ . Essa matriz é o arranjo dos autovalores resultantes do autoproblema da Equação 9.12.

$$[\tilde{K}]_{C-B} \{q\} = \lambda [\tilde{M}]_{C-B} \{q\} \quad (9.12)$$

A matriz de transformação é aplicada à base modal, de acordo com a Equação 9.13.

$$[N] \{q^*\} = \{q\} \quad (9.13)$$

O efeito na fórmula da superposição modal (Equação 9.1) é, então, apresentado na Equação 9.14.

$$x = \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i N q_i^* = \sum_{i=1}^n \varphi_i^* q_i^* \quad (9.14)$$

Onde  $\varphi_i^*$  são os modos de C-B ortogonalizados.

Para considerar a flexibilidade estrutural, é importante assumir como pequena a deformação linear relativa de um corpo ao referencial local, ao passo que esse referencial pode sofrer movimentos grandes e não lineares. Para ilustrar a aplicação da flexibilidade modal em ferramenta de MBS (Equações 9.9 a 9.14), a figura 9.2 mostra um ponto P genérico em um corpo flexível B qualquer. A posição de P é relativa ao sistema de coordenadas local B e ao referencial inercial G.



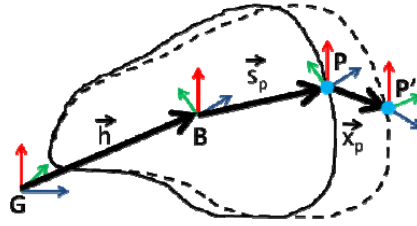


Figura 9-2 - Vetor posição do ponto P' no corpo flexível após a deformação

A localização instantânea de um ponto, conectado a um nó P' no corpo flexível (relativa aos referenciais local B e inercial G), é dada pela Equação 9.15.

$$\{r_p\} = \{h\} + \{s_p\} + \{x_p\} \quad (9.15)$$

Sendo  $\{h\}$  o vetor posição da origem do sistema global até a origem do corpo B;  $\{s_p\}$  o vetor posição do ponto P em relação à origem do corpo; e  $\{x_p\}$  o vetor da deformação translacional do ponto P da posição não deformada até a deformada.

O vetor deformação  $\{x_p\}$  é encontrado através de superposição modal, como indica a

Equação 9.16, a qual é análoga à Equação 9.1.

$$\{x_p\} = [\phi]_p \{q\} \quad (9.16)$$

Onde  $\{x_p\}$  é uma parte da matriz modal, correspondente ao GDL translacional do ponto P. A dimensão de  $[\phi]_p$  é  $3 \times n$ , onde  $n$  é o número de modos. As coordenadas modais  $q_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , são coordenadas generalizadas do corpo flexível. Esse procedimento, para cálculo do vetor deformação, pode ser aplicado em todos os GDL do corpo flexível.

As coordenadas modais  $q_i$  podem ser adicionadas ao vetor de coordenadas generalizadas, formando o vetor de coordenadas generalizadas do corpo flexível. Tal vetor é definido conforme a Equação 9.17.

$$\xi = \{x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad q_i (i=1 \dots n)\}^T \quad (9.17)$$

Onde  $x, y, z, \Phi, \theta$  e  $\psi$  são os GDL translacionais e rotacionais; e  $q_i$  as coordenadas modais.

De forma análoga aos corpos rígidos, as posições e velocidades (translação) e as orientações e velocidades angulares (rotação) dos GDL do corpo flexível são definidas. A partir da abordagem de Lagrange, a forma final da equação diferencial de movimento de um corpo flexível, em termos das suas coordenadas generalizadas, é descrita pela Equação 9.31:

$$[\tilde{M}]\ddot{\xi} + [\dot{\tilde{M}}]\dot{\xi} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial [\tilde{M}]}{\partial \xi} \dot{\xi} \right]^T \dot{\xi} + [\tilde{K}]\xi + \tilde{F}_g + [D]\dot{\xi} + \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right]^T \lambda_L = \tilde{Q} \quad (9.18)$$

Sendo,

$\xi, \dot{\xi}$  e  $\ddot{\xi}$  - Coordenadas generalizadas do corpo flexível e suas derivadas no tempo

$\tilde{F}_g$  - Força gravitacional generalizada

$\tilde{Q}$  - Forças generalizadas aplicadas

$\psi$  - Equações algébricas de restrição

$\lambda_L$  - Multiplicadores de Lagrange para as restrições

$[\tilde{M}]$  - Matriz de massa generalizada do corpo flexível

$[\dot{\tilde{M}}]$  - Derivada no tempo da matriz de massa de corpo flexível

$[\tilde{K}]$  - Matriz de rigidez generalizada

$[D]$  - Matriz de amortecimento modal

$\frac{\partial [\tilde{M}]}{\partial \xi}$  - Derivada parcial da matriz de massa com respeito às coordenadas generalizadas do corpo flexível

## 9.2 ROTINA EM MATHEMATICA PARA OBTENÇÃO DO SISTEMA EM ESPAÇO DE ESTADO

```

In[1]:= ClearAll["Global`*"]

In[2]:= H = 1.75
        M = 75
        L1 = 0.2645 * H
        L2 = 0.2655 * H
        LG1 = L1 / 2
        LG2 = L2 / 2
        m1 = 0.1 * M
        m2 = 0.0464 * M
        g = 9.81
        I1 = 1 / 12 * m1 * L1^2
        I2 = 1 / 12 * m2 * L2^2
        b1 = 0.5
        b2 = 0.3

In[15]:= L = Ec - Ep

In[16]:= x1 = LG1 * Cos[TETA1[t]]

In[17]:= y1 = LG1 * Sin[TETA1[t]]

In[18]:= x2 = L1 * Cos[TETA1[t]] + LG2 * Cos[TETA1[t] + TETA2[t]]

In[19]:= y2 = L1 * Sin[TETA1[t]] + LG2 * Sin[TETA1[t] + TETA2[t]]

In[20]:= v1 = ((D[x1, t])^2 + (D[y1, t])^2)^.5

In[21]:= v2 = ((D[x2, t])^2 + (D[y2, t])^2)^.5

In[22]:= Ec1 = m1 * v1^2 / 2 + I1 * D[TETA1[t], t]^2 / 2

In[23]:= Ec2 = m2 * v2^2 / 2 + I2 * (D[TETA1[t], t] + D[TETA2[t], t])^2 / 2

In[24]:= Ec = Ec1 + Ec2

In[25]:= Ep = m1 * g * y1 + m2 * g * y2

In[26]:= L = Ec - Ep

In[27]:= TT1 = D[D[L, TETA1'[t]], t] - D[L, TETA1[t]] + b1 * (TETA1^.)[t]

In[28]:= TT2 = D[D[L, TETA2'[t]], t] - D[L, TETA2[t]] + b2 * (TETA2^.)[t]

```

```

In[29]:= TETA1[t] = teta1

In[30]:= TETA1'[t] = teta1dot

In[31]:= TETA1''[t] = teta1dotdot

In[32]:= TETA2[t] = teta2

In[33]:= TETA2'[t] = teta2dot

In[34]:= TETA2''[t] = teta2dotdot

In[35]:= sistema=Solve[{TT1==T1,TT2==T2},{teta1dotdot,teta2dotdot}]

In[36]:= x1dot=teta1dotdot /. sistema

In[37]:= x2dot=teta2dotdot /. sistema

In[38]:= x3dot=teta1dot

In[39]:= x4dot=teta2dot

```

### 9.3 ROTINA EM MATLAB PARA CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS ANALÍTICAS

clear all;

H = 1.75; % patients height [m]

M = 75; % patients weight [kg]

L1 = 0.2645\*H;

L2 = 0.2655\*H;

d1 = L1/2;

d2 = L2/2;

m1 = 0.1\*M;

m2 = 0.0465\*M;

% Moments of inertia of the thin beams

I1 = (1/3)\*m1\*L1\*L1;

I2 = (1/3)\*m2\*L2\*L2;

g = 9.8; % gravity

syms w;

S = solve('(I1\*I2+m2\*L2^2\*I2-m2^2\*d2^2\*L1^2)\*w^4-  
(m1\*g\*d1\*I2+m2\*g\*L1\*I2+m2\*g\*d2\*I1+m2^2\*g\*d2\*L1^2)\*w^2+m1\*m2\*g^2\*d1\*d2+m2^2\*g^2\*d2  
\*L1=0');

w1=((g\*(I1^2\*d2^2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*L1\*d2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*d1\*d2\*m1\*m2 + 2\*I1\*L1^2\*d2^2\*m2^3  
+ I2^2\*L1^2\*m2^2 + 2\*I2^2\*L1\*d1\*m1\*m2 + I2^2\*d1^2\*m1^2 + 2\*I2\*L1^3\*d2\*m2^3 +  
2\*I2\*L1^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 - 4\*I2\*L1\*L2^2\*d2\*m2^3 - 4\*I2\*L2^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 +  
L1^4\*d2^2\*m2^4 + 4\*L1^3\*d2^3\*m2^4 + 4\*L1^2\*d1\*d2^3\*m1\*m2^3)^(1/2) + L1^2\*d2\*g\*m2^2 +  
I2\*L1\*g\*m2 + I2\*d1\*g\*m1 + I1\*d2\*g\*m2)/(- 2\*L1^2\*d2^2\*m2^2 + 2\*I2\*L2^2\*m2 + 2\*I1\*I2))^(1/2);

w2=((L1^2\*d2\*g\*m2^2 - g\*(I1^2\*d2^2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*L1\*d2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*d1\*d2\*m1\*m2 +  
2\*I1\*L1^2\*d2^2\*m2^3 + I2^2\*L1^2\*m2^2 + 2\*I2^2\*L1\*d1\*m1\*m2 + I2^2\*d1^2\*m1^2 +  
2\*I2\*L1^3\*d2\*m2^3 + 2\*I2\*L1^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 - 4\*I2\*L1\*L2^2\*d2\*m2^3 -  
4\*I2\*L2^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 + L1^4\*d2^2\*m2^4 + 4\*L1^3\*d2^3\*m2^4 +  
4\*L1^2\*d1\*d2^3\*m1\*m2^3)^(1/2) + I2\*L1\*g\*m2 + I2\*d1\*g\*m1 + I1\*d2\*g\*m2)/(-  
2\*L1^2\*d2^2\*m2^2 + 2\*I2\*L2^2\*m2 + 2\*I1\*I2))^(1/2);

w3=((g\*(I1^2\*d2^2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*L1\*d2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*d1\*d2\*m1\*m2 + 2\*I1\*L1^2\*d2^2\*m2^3  
+ I2^2\*L1^2\*m2^2 + 2\*I2^2\*L1\*d1\*m1\*m2 + I2^2\*d1^2\*m1^2 + 2\*I2\*L1^3\*d2\*m2^3 +  
2\*I2\*L1^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 - 4\*I2\*L1\*L2^2\*d2\*m2^3 - 4\*I2\*L2^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 +  
L1^4\*d2^2\*m2^4 + 4\*L1^3\*d2^3\*m2^4 + 4\*L1^2\*d1\*d2^3\*m1\*m2^3)^(1/2) + L1^2\*d2\*g\*m2^2 +  
I2\*L1\*g\*m2 + I2\*d1\*g\*m1 + I1\*d2\*g\*m2)/(- 2\*L1^2\*d2^2\*m2^2 + 2\*I2\*L2^2\*m2 + 2\*I1\*I2))^(1/2);

w4=((L1^2\*d2\*g\*m2^2 - g\*(I1^2\*d2^2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*L1\*d2\*m2^2 - 2\*I1\*I2\*d1\*d2\*m1\*m2 +  
2\*I1\*L1^2\*d2^2\*m2^3 + I2^2\*L1^2\*m2^2 + 2\*I2^2\*L1\*d1\*m1\*m2 + I2^2\*d1^2\*m1^2 +  
2\*I2\*L1^3\*d2\*m2^3 + 2\*I2\*L1^2\*d1\*d2\*m1\*m2^2 - 4\*I2\*L1\*L2^2\*d2\*m2^3 -

$$\frac{4*I2*L2^2*d1*d2*m1*m2^2 + L1^4*d2^2*m2^4 + 4*L1^3*d2^3*m2^4 + 4*L1^2*d1*d2^3*m1*m2^3)^{(1/2)} + I2*L1*g*m2 + I2*d1*g*m1 + I1*d2*g*m2}{(-2*L1^2*d2^2*m2^2 + 2*I2*L2^2*m2 + 2*I1*I2))^{(1/2)}};$$

$$f1=w1/2/\pi$$

$$f2=w2/2/\pi$$

$$f3=w3/2/\pi$$

$$f4=w4/2/\pi$$

## 9.4 ROTINA SCILAB – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NÃO LINEAR

Arquivo Sce:

```
clear all
// Carregar a funcao que implementa o modelo matematico do sistema
exec("C:/Humberto/TFIII/Scilab/Sistema_amort_zero_torque_zero.sci");
//Definir a frequência da senoide
w=0;
// Definir a condicao inicial: (5 graus inclinado)
y0=[0;0;%pi;%pi/2];
// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:0.01:10;
// Comando que realiza a simulacao numerica:
y=ode(y0,t(1),t,list(f,entrada1,entrada2));
//Plotando o resultado
//figure(1);
//plot2d(t,y(1,:))
//T=list("Oscilação livre - Velocidade angular da coxa","Tempo t [s]","Teta1dot
[rad/s]");
//xtitle(T(1),T(2),T(3));
//xgrid(2)

//figure(2);
//plot2d(t,y(2,:))
//T=list("Oscilação livre - Velocidade angular da canela","Tempo t [s]","Teta2dot
[rad/s]");
//xtitle(T(1),T(2),T(3));
//xgrid(2)

figure(3);
plot2d(t,y(3,:))
T=list("Oscilação livre - Posição angular da coxa","Tempo t [s]","Teta1 [rad]");
xtitle(T(1),T(2),T(3));
xgrid(2)

figure(4);
plot2d(t,y(4,:))
T=list("Oscilação livre - Posição angular da canela","Tempo t [s]","Teta2 [rad]");
xtitle(T(1),T(2),T(3));
xgrid(2)

y_trans=y';
csvWrite(y_trans, "C:/Humberto/TFIII/Scilab/saida_osc_livre_ortogonal.csv");
```

Arquivo Sci:

*//funções do sistema com torque zero (fator 0 multiplicando u e v) e sem amortecimento*

```
function [ydot]=f(t, y, T1, T2)
    ydot=[-((1.*(-1.*T2(t)+0.000*y(2)+7.9309*cos(y(3))+y(4))-
0.374211*y(1)*y(2)*sin(y(4))+0.374211*y(1)*(y(1)+y(2))*sin(y(4)))/(0.250416+0.37
4211*cos(y(4))))+(0.250416*(-1.*(1.5315239999999999+0.748422*cos(y(4)))*(-
1.*T2(t)+0.000*y(2)+7.9309*cos(y(3))+y(4))-
0.374211*y(1)*y(2)*sin(y(4))+0.374211*y(1)*(y(1)+y(2))*sin(y(4)))+(0.250416+0.374
211*cos(y(4)))*(-1.*T1(t)+0.00000*y(1)+32.83*cos(y(3))+7.9309*cos(y(3))+y(4))-
0.374211*y(1)*y(2)*sin(y(4))-
0.374211*y(2)*(y(1)+y(2))*sin(y(4))))/((0.250416+0.374211*cos(y(4)))*(-
0.32080994092799997+0.*cos(y(4))+0.14003387252100002*cos(y(4))^2));
-(1.*(-1.*(1.5315239999999999+0.748422*cos(y(4)))*(-
1.*T2(t)+0.000*y(2)+7.9309*cos(y(3))+y(4))-
0.374211*y(1)*y(2)*sin(y(4))+0.374211*y(1)*(y(1)+y(2))*sin(y(4)))+(0.250416+0.374
211*cos(y(4)))*(-1.*T1(t)+0.00000*y(1)+32.83*cos(y(3))+7.9309*cos(y(3))+y(4))-
0.374211*y(1)*y(2)*sin(y(4))-0.374211*y(2)*(y(1)+y(2))*sin(y(4))))/(-
0.32080994092799997+0.*cos(y(4))+0.14003387252100002*cos(y(4))^2);y(1);y(2)]
endfunction
```

```
function [u]=entrada1(t)
    u=sin(w*t)*0;
endfunction
```

```
function [v]=entrada2(t)
    v=sin(w*t)*0;
endfunction
```



## 9.5 MODELO DO MECANISMO NO MOTIONVIEW

////////////////////////////////////

Altair HyperWorks

Version : HWVERSION\_12.0.115-HWDesktop\_Apr 15 2014\_01:21:34

Model : The Model

Customer ID :

Date : 05/12/14 12:15:33

////////////////////////////////////

\*BeginMDL( the\_model, "The Model", "12.0.115-HWDesktop" )

\*StandardInclude(FILE)

\*SetCurrentSolverMode(MotionSolve)

\*Point( p\_qua, "Quadril" )

\*Point( p\_joe, "Joelho" )

\*Point( p\_pe, "Pe" )

\*Point( p\_cox\_cm, "Coxa CM" )

\*Point( p\_can\_cm, "Canela CM" )

\*DataSet( ds\_0, "Dataset 0", def\_ds\_0 )

\*Body( b\_cox, "Coxa", p\_cox\_cm, , , , )

\*Body( b\_can, "Canela", p\_can\_cm, , , , )

\*Graphic( gra\_cox, "Coxa", CYLINDER, b\_cox, p\_qua, POINT, MODEL.p\_joe, .075, gra\_cox.r1, , 0.0, CAPBOTH )

\*Graphic( gra\_pe1, "Pe1", CYLINDER, b\_can, p\_joe, POINT, MODEL.p\_pe, .05, gra\_pe1.r1, , 0.0, CAPBOTH )

\*Graphic( gra\_pe2, "Pe2", CYLINDER, b\_can, p\_pe, VECTOR, MODEL.b\_can.cm.yaxis, .05, gra\_pe2.r1, .25, 0.0, CAPBOTH )

\*RevJoint( j\_qua, "Quadril", B\_Ground, b\_cox, p\_qua, VECTOR, MODEL.V\_Global\_Z )

\*RevJoint( j\_joe, "Joelho", b\_cox, b\_can, p\_joe, VECTOR, MODEL.V\_Global\_Z )

\*ActionOnlyForce( frc\_t1, "T1", ROT, b\_cox, p\_qua, MODEL.Global\_Frame )

\*ActionReactionForce( frc\_t2, "T2", ROT, MODEL.b\_can, b\_cox, MODEL.p\_joe, MODEL.Global\_Frame )

\*Motion( mot\_0, "Motion 0", JOINT, j\_qua, ROT )

```

*Motion( mot_1, "Motion 1", JOINT, j_joe, ROT )

*Output( o_teta1, "Quadril", EXPR, `rtod((AZ({the_model.b_cox.cm.idstring}))-
{the_model.ds_0.real_teta1.value})`, `rtod(WZ(30102050))`, `0`, `0`, `0`, `0` )

*Output( o_teta2, "Joelho", EXPR,
`rtod((AZ({the_model.b_can.cm.idstring},{the_model.b_cox.cm.idstring}))-
{the_model.ds_0.real_teta2.value})`,
`rtod(WZ({the_model.b_can.cm.idstring},{the_model.b_cox.cm.idstring}))), `0`, `0`, `0`, `0` )

*SetReal( DS_Gravity.jgrav,      -9.81 )

*SetReal( DS_Gravity.kgrav,      0 )

*SetOption( DS_Units.op_length,  "METER" )

*SetPoint( p_joe,                0.462875*COS(the_model.ds_0.real_teta1.value),
0.462875*SIN(the_model.ds_0.real_teta1.value) )

*SetPoint( p_pe,                0.462875*COS(the_model.ds_0.real_teta1.value) +
0.464625*COS(the_model.ds_0.real_teta1.value+the_model.ds_0.real_teta2.value),
0.462875*SIN(the_model.ds_0.real_teta1.value) +
0.464625*SIN(the_model.ds_0.real_teta1.value+the_model.ds_0.real_teta2.value) )

*SetPoint( p_cox_cm,            (the_model.p_qua.x+the_model.p_joe.x)/2,
(the_model.p_qua.y+the_model.p_joe.y)/2 )

*SetPoint( p_can_cm,            (the_model.p_joe.x+the_model.p_pe.x)/2,
(the_model.p_joe.y+the_model.p_pe.y)/2 )

*SetBodyInertia( b_cox,         7.5, , 0.133908, 0.133908 )

*SetBodyInertia( b_can,         3.48, , 0.0626042, 0.0626042 )

*SetState( b_cox,              true )

*Set( b_cox.usecm, true )

*SetOrientation( b_cox.cm,      TWOAXES, XY, DXDYDZ, 0.0, 0.0, 1.0, DXDYDZ, 1.0, 0.0,
0.0 )

*SetOrientation( b_cox.cm,      TWOAXES, XY, POINT, MODEL.p_joe, DXDYDZ, 1.0, 0.0,
0.0 )

*Set( b_can.usecm, true )

*SetOrientation( b_can.cm,      TWOAXES, XY, POINT, MODEL.p_pe, DXDYDZ, 1.0, 0.0,
0.0 )

*SetMotion( mot_0,             VEL, LIN, 0 )

*SetMotion( mot_1,             VEL, LIN )

*SetForce( frc_t2,             LIN, , LIN, , LIN, 7.93087 )

*SetState( frc_t2,             true )

```

```

*SetState( frc_t1,          true )

*SetState( mot_1,          false )

*SetState( mot_0,          false )

*SetForce( frc_t1,          LIN, , LIN, , LIN, 0 )

*SetForce( frc_t1,          LIN, , LIN, , EXPR, `STEP(TIME,0,0,.1,1)*0` )

*SetForce( frc_t2,          LIN, , LIN, , EXPR, `STEP(TIME,0,0,.1,1)*0` )

*SetReal( ds_0.real_teta1,   -90*PI/180+5*PI/180 )

*SetOption( DS_MotionSolve_Simopts.analysis_type,   "Transient" )

*SetReal( DS_MotionSolve_Simopts.end_time,   50 )

*SetActiveAnalysis( NONE )

*DefineDataSet( def_ds_0 )

*Real( real_teta1, "teta1" )

*Real( real_teta2, "teta2" )

*EndDefine()

*EndMDL()

```

## 9.6 MODELO ELEMENTOS FINITOS MATLAB

```

clear all

D=2*0.0254; E=7e9; L=0.4629; rho=8000; A=(pi*D^2)/4;

% 2 elementos

K=A*E/(L/2)*[1 -1 0;-1 2 -1;0 -1 1];

M=rho*(L/2)*A*[1/3 1/6 0;1/6 2/3 1/6;0 1/6 1/3];

disp('1');

W2e=sqrt(-eig(inv(M)*K));

W2e_ref=[0; 1*pi*sqrt(E/(rho*L^2)); 2*pi*sqrt(E/(rho*L^2))];

F2e=W2e/2/pi

Fe2_ref=W2e_ref/2/pi

```